

Tegyük fel, hogy a tetraéder létezik. Ismeretes, hogy egy tetraéder lapjai akkor és csak akkor egybevágók, ha a köré írt paralelepipedon téglatest. Ismert tétel az is, hogy ha a tetraéder lapjai egybevágók, akkor a lapok hegyesszögű háromszögek, továbbá, hogy a tetraéder térfogata a körülírt paralelepipedon térfogatának harmada. Ezek a tételek (bizonyítási útmutatással) megtalálhatók a Geometriai feladatok gyűjtemény I. 2088–2090., illetve 2083. feladataiként. Mivel a körülírt paralelepipedon téglatest, a tetraéder szemközti élei egyenlők lesznek. *Ábránk* így készült, amelynek alapján meghatározzuk a paralelepipedon élei hosszát:

$$(1) \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 &= c^2 \\ y^2 + z^2 &= b^2 \\ z^2 + x^2 &= a^2. \end{aligned}$$

(1)-ből $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$, amelybe az (1)-ben szereplő egyenletek jobb oldalát helyettesítve:

$$x = \sqrt{\frac{a^2 - b^2 + c^2}{2}}, \quad y = \sqrt{\frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2}}, \quad z = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}}.$$

A paralelepipedon térfogata $x \cdot y \cdot z$, ezért a tetraéder térfogata:

$$V = \frac{1}{3} x \cdot y \cdot z = \frac{1}{6 \cdot \sqrt{2}} \cdot \sqrt{(-a^2 + b^2 + c^2) \cdot (a^2 - b^2 + c^2) \cdot (a^2 + b^2 - c^2)}.$$

Mivel a tetraéder lapjai hegyesszögű háromszögek,

$$(2) \quad a^2 < b^2 + c^2 \quad \text{és} \quad b^2 < a^2 + c^2 \quad \text{és} \quad c^2 < a^2 + b^2,$$

tehát a négyzetgyökjel alatti tényezők pozitívak.

Maróti Attila (Szeged, Ságvári E. Gimn., IV. o. t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. A feladat szövege szerint természetesnek vehettük, hogy a tetraéder létezik, és ekkor fennáll a (2) feltétel. Megfordítva megmutatható, hogy ha a (2) fennáll, akkor létezik olyan tetraéder, amelynek lapjai a , b , c oldalú egybevágó háromszögek, és egyetlen ilyen tetraéder van.

