Használjuk az *ábra* jelöléseit. Ismeretes, hogy a háromszög bármelyik szögfelezője a szög csúcsával szemközti oldalt a szöget bezáró oldalak arányában osztja. Ezért pl.

$$AQ = \frac{b \cdot c}{a + c}, \qquad AR = \frac{b \cdot c}{a + b}. \tag{1}$$

Jelöljük pl. az AQR háromszög területét t_{AQR}-rel. A bizonyítandó állítás nyilván ekvivalens azzal, hogy $t_{AQR} + t_{BPR} + t_{CPQ} \geq \frac{3}{4}$-t, amiből

$$\frac{t_{AQR}}{t} + \frac{t_{BPR}}{t} + \frac{t_{CPQ}}{t} \leq \frac{3}{4}. \tag{2}$$

A háromszögek területét két oldallal és a közbezárt szöggel kifejezve (2) bal oldalának első tagja így alakul:

$$\frac{t_{AQR}}{t} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{b \cdot c}{a+b}} \cdot \sin\alpha}{\frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha} = \frac{b \cdot c}{(a+b)(a+c)}.$$

Hasonlóan írhatjuk föl a (2) bal oldalán szereplő másik két tagot. Ezért a belátandó egyenlőtlenség:

$$\frac{b \cdot c}{(a+b)(a+c)} + \frac{a \cdot c}{(a+b)(b+c)} + \frac{a \cdot b}{(a+b)(b+c)} \geq \frac{3}{4}.$$

A tötet eltávolítva és a szorzásokat elvégezve:

$$4\left(bc^2 + b^2c + a^2c + ac^2 + ab^2 + a^2b\right) \leq$$
$$\leq 3\left(a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + bc^2 + b^2c\right) + 6abc,$$

amiből

$$\frac{bc^2 + b^2c + a^2c + ac^2 + ab^2 + a^2b}{6} \geq abc. \tag{3}$$

a (3) számlálójában lévő 6 tag mértani közepe $\sqrt[6]{a^6b^6c^6} = abc$, ezért (3) igaz. Egyenlőség pontosan akkor van, ha $a = b = c$. Mivel átalakításaink megfordíthatók, a feladat állítását megmutattuk.

Megjegyzés. Néhány megoldónk szögfelezők helyett a háromszög egy belső pontján áthaladó – egyébként tetszőleges – AP, BQ, CR esetén is megmutatta, hogy $t_{PQR} \leq \frac{t}{4}$. Ez a következőképpen történhet. Ha az R pont az AB oldalt $k : (1-k)$ arányban osztja, és hasonlóan $BP : PC = l : (1-l)$, illetve $CQ : QA = m : (1-m)$, akkor a bizonyítandó állítás:

$$t - t \cdot k \cdot (1-m) - t \cdot m \cdot (1-l) - t \cdot l \cdot (1-k) \leq \frac{t}{4},$$

és felhasználhatjuk, hogy a Ceva-tétel szerint

$$\frac{k}{1-k} \cdot \frac{l}{1-l} \cdot \frac{m}{1-m} = 1.$$

Szobolya László (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., II. o.t.) dolgozata alapján

