

Szorozzuk meg a jobb oldalt $abc = 1$ -gyel, és rendezzünk minden tagot a bal oldalra (az egyenlőtlenség továbbra is fennmarad):

$$\begin{aligned}a + b + c &> bc + ac + ab, \\ a + b + c - ab - bc - ca &> 0.\end{aligned}$$

Adjunk a bal oldalhoz $abc - 1 = 0$ -t, akkor szorzattá lehet alakítani:

$$\begin{aligned}abc - ab - bc - ca + a + b + c &> 0, \\ (a - 1)(b - 1)(c - 1) &> 0.\end{aligned}$$

Ez akkor teljesül, ha mindhárom tényező pozitív, vagy pedig egyikük pozitív, a másik kettő negatív. Ha azonban mindhárom tényező pozitív lenne, akkor $a > 1, b > 1, c > 1$, ami ellentmond az $abc = 1$ feltételnek. A három tényező közül tehát pontosan az egyik pozitív, ami azt jelenti, hogy a, b és c közül pontosan az egyik nagyobb 1-nél.

Marx Dániel (Budapest, Szent István Gimn. III.o.t.)

Megjegyzés. Talán kicsit váratlannak tűnik a megoldásban alkalmazott ötlet. Az (1) egyenlőtlenséghez más gondolatmenettel is eljuthatunk.

Mivel a -t, b -t és c -t 1-gyel akarjuk összehasonlítani, legyen $a = 1 + x, b = 1 + y, c = 1 + z$. Azt kell bebizonyítani, hogy ha $(1 + x)(1 + y)(1 + z) = 1$, azaz $x + y + z + xy + xz + yz + xyz = 0$, és

$$(1) \quad 3 + x + y + z > \frac{1}{1 + x} + \frac{1}{1 + y} + \frac{1}{1 + z},$$

akkor, x, y és z közül pontosan az egyik pozitív. Ha (2)-t a megoldásban látott módon átrendezzük, akkor

$$0 > x + y + z + xy + xz + yz,$$

vagyis, az

$$xyz > 0$$

egyenlőtlenséget kapjuk.