Legyen a sorozat első eleme $a_1$, hányadosa $q$. A mértani sorozat összegképlete szerint tetszőleges $n$ pozitív egészre:

$$S_n = \begin{cases} na_1, & \text{ha } q = 1; \\ a_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}, & \text{ha } q \neq 1. \end{cases}$$

Ha $q = 1$, akkor az állítás a következő:

Ha

$$200a_1 + 1 = (100a_1 + 1)^2, \tag{1}$$

akkor

$$600a_1 + 1 = (300a_1 + 1)^2. \tag{2}$$

A négyzetreemeléseket elvégezve látható, hogy (1) és (2) egyaránt az $a_1 = 0$ összefüggéssel ekvivalens.

Ha $q \neq 1$, akkor az állítás a következő alakban írható fel:

Ha

$$a_1 \frac{q^{200} - 1}{q - 1} + 1 = \left( a_1 \frac{q^{100} - 1}{q - 1} + 1 \right)^2, \tag{3}$$

akkor

$$a_1 \frac{q^{600} - 1}{q - 1} + 1 = \left( a_1 \frac{q^{300} - 1}{q - 1} + 1 \right)^2. \tag{4}$$

Legyen $h = \dfrac{a_1}{q - 1}$. Ezt behelyettesítve (3)-ba és rendezve:

$$\begin{aligned} & h\left(q^{200} - 1\right) + 1 = \left(h\left(q^{100} - 1\right) + 1\right)^2 \\ & h\left(q^{100} - 1\right)\left(q^{100} +\right) + 1 = h^2\left(q^{100} - 1\right)^2 + 2h\left(q^{100} - 1\right) + 1 \\ & h\left(q^{100} - 1\right)\left(h\left(q^{100} - 1\right) + 2 - \left(q^{100} + 1\right)\right) = 0 \end{aligned}$$

$$h\,(h - 1)\left(q^{100} - 1\right)^2 = 0. \tag{3'}$$

Mivel ezek ekvivalens átalakítások, (3) és (3') ekvivalensek. Ha ugyanezeket elvégezzük (4)-gyel is, a következőt kapjuk:

$$h(h - 1)\left(q^{300} - 1\right)^2 = 0. \tag{4'}$$

Ebből azonban kiemelhető (3'):

$$h\,(h - 1)\left(q^{100} - 1\right)^2\left(q^{200} + q^{100} + 1\right)^2 = 0. \tag{5}$$

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

*Megjegyzések.*

1. Az állítás megfordítása is igaz (legalábbis a valós számok körében), mert $q^{200} + q^{100} + 1$ mindig pozitív.

2. A számítások kicsit egyszerűbben is elvégezhetők, ha $S_{200}$-at, $S_{300}$-at és $S_{600}$-at $q^{100}$ és $S_{100}$ segítségével fejezzük ki. Könnyen ellenőrízhető, hogy

$$\begin{aligned} S_{200} &= \left(1 + q^{100}\right) S_{100}, \\ S_{300} &= \left(1 + q^{100} + q^{200}\right) S_{100}, \end{aligned}$$

és

$$S_{600} = \left(1 + q^{100} + \cdots + q^{500}\right) S_{100}.$$

Ezek után a feltétel a következőképpen alakítható át:

$$\left(1+q^{100}\right) S_{100}+1=\left(S_{100}+1\right)^{2},$$
$$S_{100}\left(S_{100}-q^{100}+1\right)=0.$$

Ebből

$$S_{100}=0 \qquad \text{vagy} \qquad S_{100}=q^{100}-1.$$

Ha $S_{100}=0$, akkor $S_{300}=S_{600}=0$ és az állítás teljesül. Ha $S_{100}=q^{100}-1$, akkor $S_{300}=q^{300}-1$ és $S_{600}=q^{600}-1$, amit behelyettesítve könnyen ellenőrízhető az állítás.

3. Az $S_{200}+1=\left(S_{100}+1\right)^{2}$ feltétel a következő esetekben teljesül (ezt a megoldásból lehet kiolvasni):

a) A sorozat minden eleme 0;

b) $a_1=q-1$;

c) $q=-1$.