I. megoldás. Az (1) egyenletből fejezzük ki x-et, és helyettesítsük be (2)-be:

$$x = 11 - y - z \tag{3}$$

$$(11 - y - z)^2 + 2y^2 + 3z^2 = 66$$

$$3y^2 + 2yz + 4z^2 - 22y - 22z + 55 = 0. \tag{4}$$

Tekintsük ezt egy y-ra vonatkozó másodfokú egyenletnek:

$$3y^2 + (2z - 22)y + (4z^2 - 22z + 55) = 0. \tag{5}$$

Ennek pontosan akkor van megoldása, ha a diszkriminánsa nemnegatív:

$$\begin{aligned} (2z-22)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (4z^2 - 22z + 55) &\geq 0, \\ -44z^2 + 176z - 176 &\geq 0, \\ -z^2 + 4z - 4 &\geq 0, \\ -(z-2)^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Mivel $(z-2)^2 \geq 0$, ez csak akkor teljesül, ha $(z-2)^2 = 0$, azaz $z = 2$. Ekkor (5) alapján

$$3y^2 - 18y + 27 = 0,$$

aminek egyetlen megoldása $y = 3$. Végül $x = 11 - y - z = 6$.

Ezek a számok ki is elégítik az egyenletrendszert.

Megjegyzés. A megoldás úgy is elmondható, hogy (4) bal oldalát négyzetösszeggé alakítjuk:

$$3\left(y + \frac{1}{3}z - \frac{11}{3}\right)^2 + \frac{11}{3}(z-2)^2 = 0.$$

Ez pontosan akkor teljesül, ha mindkét zárójelben 0 áll:

$$y + \frac{1}{3}z - \frac{11}{3} = 0 \qquad \text{és } z - 2 = 0,$$

vagyis $z = 2$ és $y = 3$.

Mivel az (5) egyenletre alkalmazott megoldóképlet pontosan ugyanezen az ötleten alapul, ez a két megoldás lényegében ugyanaz.

II. megoldás. Írjuk fel a súlyozott számtani és négyzetes közép közötti egyenlőtlenséget az $x, 2y, 3z$ számokra az $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}$ súlyokkal (Ez az egyenlőtlenség tetszőleges valós számokra is teljesül):

$$\begin{aligned} \frac{1 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot 2y + \frac{1}{3} \cdot 3z}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}} &\leq \sqrt{\frac{1 \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot (2y)^2 + \frac{1}{3} \cdot (3y)^2}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}}} \\ \frac{x + y + z}{\frac{11}{6}} &\leq \sqrt{\frac{x^2 + 2y^2 + 3y^2}{\frac{11}{6}}}; \end{aligned}$$

innen (1) és (2) alkalmazásával

$$6 \leq \sqrt{36}.$$

Láthatjuk, hogy a két közép egyenlő. Ismeretes, hogy a számtani és a négyzetes közép pontosan akkor egyezik meg, ha a közepekben szereplő számok nemnegatívak és egyenlők, azaz

$$x = 2y = 3z > 0.$$

Ebből $y = \dfrac{x}{2}$ és $z = \dfrac{x}{3}$, amit (1)-be behelyettesítve:

$$\begin{aligned} x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} &= 11, \\ x &= 6, \end{aligned}$$

$$y=\frac{x}{2}=3 \quad \text{és} \quad z=\frac{x}{3}=2.$$

Megjegyzés. A felhasznált egyenlőtlenség egy átírását, a Cauchy – Schwarz – Bunyakovszkij egyenlőtlenséget is felírhattuk volna az $x, \sqrt{2}y, \sqrt{3}z$, illetve $1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ számokkal:

$$\left(x\cdot 1+\sqrt{2}y\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{3}z\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \leq$$
$$\leq\left(x^2+\left(\sqrt{2}y\right)^2+\left(\sqrt{3}z\right)^2\right)\cdot\left(1^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right),$$

azaz

$$(x+y+z)^2\leq\frac{11}{6}(x^2+2y^2+3z^2).$$

Itt az egyenlőség (ami fennáll) szükséges és elégséges feltétele:

$$x:\sqrt{2}y:\sqrt{3}z=1:\frac{1}{\sqrt{2}}:\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

III. megoldás. Vonjuk ki (2)-ből (1) 12-szeresét, és alakítsuk négyzetösszeggé:

$$x^2-12x+2y^2-12y+3z^2-12z=-66,$$
$$(x-6)^2+2(y-3)^2+3(z-2)^2=0.$$

Ez pontosan akkor teljesül, ha $x=6, y=3, z=2$.