Először megmutatjuk, hogy egy téglalapba írt háromszög területe legfeljebb a téglalap területének a fele. Az *1. ábrán* az A pontból merőlegest húzunk a téglalap a oldalára. Ennek a merőlegesnek a két partján keletkezett akármelyik részháromszög területe legfeljebb akkora, mint az őt tartalmazó résztéglalap területének a fele, ezért $T_{ABC} \geq \frac{a \cdot b}{2}$. Ha az A, B, C pontok közül legalább egy a téglalap belsejében van, akkor

$$T_{ABC} < \frac{a \cdot b}{2}. \tag{1}$$

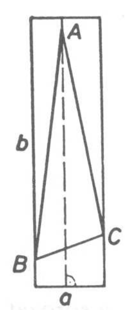
1. ábra *2. ábra* *3. ábra*

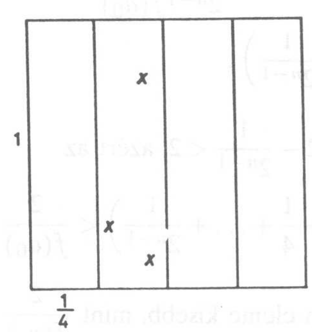
Osszuk fel ezután az egységnégyzetet egyik szemközti oldalpárjával párhuzamos egyenesekkel négy $\frac{1}{4}$ szélességű téglalapra (*2. ábra*). Mivel a négyzet belsejében 9 pont van, legalább az egyik oszlopban legalább 3 pont lesz. E három pont egyike sem eshet a téglalap $\frac{1}{4}$ hosszúságú oldalára, ezért a három pont olyan háromszöget alkot, amelynek területe (1) alapján $\frac{1}{8}$-nál kisebb. Ha az elmondott felosztást a másik oldalpárral párhuzamos egyenesekkel végezzük – a négyzetet így „sorokra" bontjuk – újra találhatunk egy olyan háromszöget, amelynek területe $\frac{1}{8}$-nál kisebb. Ha az újabb háromszög nem azonos az előzővel, akkor a bizonyítással készen vagyunk.

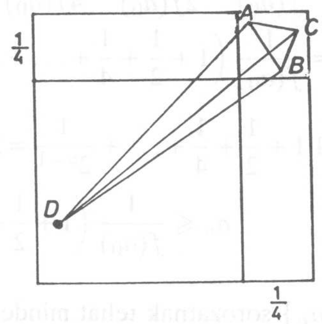
Hátra van még az az eset, amikor a kétféle felosztással ugyanazt a ponthármast választjuk ki. A *3. ábra* ilyen esetet tüntet fel. Bebizonyítjuk, hogy ekkor bármely további D pont az A, B, C közül valamelyik kettővel $\frac{1}{8}$-nál kisebb területű háromszöget alkot. Feltehető, hogy pl. DC a DA és DB félegyenesek meghatározta szögtartományban van (valamelyikkel egybe is eshet). Az $ABCD$ négyszög területét a következőképpen becsüljük:

$$AB < \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{4} \text{ és } DC < \sqrt{2},$$

ezért $T_{ABCD} < \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{4}$. De akkor a DAC vagy DBC háromszögek valamelyikének a területe kisebb lesz $\frac{1}{4} : 2 = \frac{1}{8}$-nál. Ezzel a feladat állítását bizonyítottuk.







A
C
B
D
$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{4}$