

Tegyük fel, hogy nem igaz a feladat állítása, vagyis minden a valós számra

$$f\left(a + \frac{1}{f(a)}\right) \geq 2f(a).$$

Definiáljuk az $a_0, a_1, \dots$ sorozatot a következő rekurzióval:

$$a_0 = 0, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{f(a_n)}.$$

Az indirekt feltevés alapján a tetszőleges n nemnegatív egész számra:

$$f(a_{n+1}) = f\left(a_n + \frac{1}{f(a_n)}\right) \geq 2f(a_n);$$

ebből n szerinti indukcióval azt kapjuk, hogy

$$(1) \quad f(a_n) \geq 2^n f(a_0).$$

Megmutatjuk viszont, hogy az $\{a_n\}$ sorozat felülről korlátos. A rekurziót és (1)-et felhasználva:

$$\begin{aligned} a_n &= a_n - a_0 = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_n - a_{n-1}) = \\ &= \frac{1}{f(a_0)} + \frac{1}{f(a_1)} + \frac{1}{f(a_2)} + \dots + \frac{1}{f(a_{n-1})} \geq \\ &\geq \frac{1}{f(a_0)} + \frac{1}{2f(a_0)} + \frac{1}{4f(a_0)} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}f(a_0)} = \\ &= \frac{1}{f(a_0)} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right). \end{aligned}$$

Mivel $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} < 2$, azért az

$$a_n \leq \frac{1}{f(a_0)} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) < \frac{2}{f(a_0)}.$$

Az $\{a_n\}$ sorozatnak tehát minden eleme kisebb, mint $\frac{2}{f(a_0)}$, a sorozat felülről korlátos.

Legyen $b = \frac{2}{f(a_0)}$. Mivel az f függvény monoton nő, és minden $n \geq 0$ egészre $a_n < b$,

$$(2) \quad f(a_n) \leq f(b).$$

Ha most összevetjük (1)-et és (2)-t, ellentmondásra jutunk:

$$\begin{aligned} 2^n f(a_0) &\leq f(a_n) \leq f(b), \\ 2^n &\leq \frac{f(b)}{f(a_0)}. \end{aligned}$$

Ez az egyenlőtlenség azt állítja, hogy minden 2-hatvány kisebb vagy egyenlő, mint $\frac{f(b)}{f(a_0)}$, ami lehetetlen.

Az indirekt feltevésből ellentmondásra jutottunk, tehát az állítás igaz.