I. megoldás. Ábránkon BE párhuzamos az f_a szögfelezővel.

1993-12-508-1.eps

Az *ábra* jelölései szerint $BE=2\cdot c\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}$. A párhuzamos szelők tétele alapján $\dfrac{f_a}{BE}=\dfrac{b}{b+c}$, amiből BE előbbi kifejezését fölhasználva:

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{f_a(b+c)}{2bc}. \tag{1}$$

A koszinusztétel szerint

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha. \tag{2}$$

Tudjuk, hogy $\cos^2\alpha=2\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}-1$, ezért (1) és (2)-ből

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\left(\frac{f_a(b+c)^2}{2b^2c^2}-1\right).$$

Utóbbi összefüggésünkből

$$\begin{aligned} f_a^2&=\frac{b\cdot c}{(b+c)^2}\left((b+c)^2-a^2\right)=\frac{b\cdot c}{(b+c)^2}(b+c+a)(b+c-a)=\\ &=\frac{b\cdot c}{(b+c)^2}\cdot 4s(s-a), \end{aligned}$$

így

$$f_a=\frac{2\sqrt{bcs(s-a)}}{b+c}. \tag{3}$$

A (3)-hoz hasonló képleteket nyerhetünk f_b-re és f_c-re is. Tekintsük ezután a szögfelező szakaszok szorzatát:

$$f_a\cdot f_b\cdot f_c=\frac{8abcs\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{(a+b)(a+c)(b+c)}.$$

Ebből

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\frac{(a+b)(a+c)(b+c)\cdot f_a\cdot f_b\cdot f_c}{8abcs},$$

ami a Heron-képlet szerint azt mutatja, hogy a háromszög területe feltételeink mellett racionális.

Rónai András (Budapest, Dózsa Gy. Gimn., IV. o. t.)

II. megoldás. Az első megoldásból (1) szerint $\cos\dfrac{\alpha}{2}$ racionális.

Könnyen megmutatható, hogy $\sin\alpha$ is racionális. Ehhez felhasználjuk a

$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cdot\cos\dfrac{\alpha}{2}\cdot\cos\dfrac{\beta}{2}\cdot\cos\dfrac{\gamma}{2}$ azonosságot. (Igazolása megtalálható a Geometriai feladatok gyűjteménye II. 434.a) feladat megoldásánál). Ebből az összefüggésből

$$\sin\alpha\left(1+\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}+\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\right)=4\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2},$$

amiből már látszik, hogy $\sin\alpha$ racionális, hiszen a bal oldalon a zárójelben szereplő törtek a szinusztétel szerint racionális számok, a jobb oldalon lévő félszögek koszinusza pedig az első megoldásban látottak alapján racionális. Így $t=\dfrac{b\cdot c\cdot\sin\alpha}{2}$ is racionális.

Markót Mihály (Szeged, Radnóti M. Gimn., III. o. t.) megoldása alapján

Megjegyzések: 1. Felmerülhet a kérdés, hogy létezik-e a feladat feltételeinek megfelelő háromszög. Erre szükséges és elegendő feltételt találunk A Matematika Tanítása c. folyóirat 1981. évi 1. számában, dr. Kelemen József cikkében.

Példaként oldalaival megadunk egy olyan háromszöget, amelynek szögfelezőszakaszai is racionálisak: $a=231,\ b=250,\ c=289$.

2. Mindkét megoldásból kiderül, hogy a feladatban szereplő háromszög bármelyik szögének vagy félszögének szinusza és koszinusza racionális.