I. megoldás. Legyen a feladatban szereplő 1-től különböző állandó k. Ekkor

$$\frac{AC_1}{AB}=\frac{BA_1}{BC}=\frac{CB_1}{CA}=\frac{k}{k+1}\quad\text{és}\quad\frac{C_1B}{AB}=\frac{A_1C}{BC}=\frac{B_1A}{CA}=\frac{1}{k+1}.$$

1993-11-384-1.eps

1. ábra

Válasszuk vonatkoztatási pontnak a körülírt kör középpontját, és a csúcsok helyvektorai legyenek $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$. Ismeretes, hogy a háromszög S súlypontjának helyvektora $\dfrac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}$, továbbá az is, hogy M, S, O egy egyenesen, az Euler-egyenesen vannak.
$MS=2\cdot SO$, ezért $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}$.

Hasonlóan belátható, hogy $\overrightarrow{O_1M_1}=\overrightarrow{O_1A_1}+\overrightarrow{O_1B_1}+\overrightarrow{O_1C_1}$.

1993-11-384-2.eps

2. ábra

Ezeket az eredményeket fölhasználva az alábbi könnyen követhető számításokkal kifejezzük az $\overrightarrow{M_1M}$-t az $\overrightarrow{OO_1}$-ral:

$$\overrightarrow{OA_1}=\frac{1}{k+1}\mathbf{b}+\frac{k}{k+1}\mathbf{c},\quad \overrightarrow{OB_1}=\frac{1}{k+1}\mathbf{c}+\frac{k}{k+1}\mathbf{a},\quad \overrightarrow{OC_1}=\frac{1}{k+1}\mathbf{a}+\frac{k}{k+1}\mathbf{b}.$$
$$\overrightarrow{O_1A_1}=\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OO_1},\quad \overrightarrow{O_1B_1}=\overrightarrow{OB_1}-\overrightarrow{OO_1},\quad \overrightarrow{O_1C_1}=\overrightarrow{OC_1}-\overrightarrow{OO_1}.$$
$$\overrightarrow{O_1M_1}=\overrightarrow{OA_1}-\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{OB_1}-\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{OC_1}-\overrightarrow{OO_1}=$$
$$=\frac{1}{k+1}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})+\frac{k}{k+1}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})-3\overrightarrow{OO_1}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}-3\overrightarrow{OO_1}.$$

Ezt felhasználva:

$$\overrightarrow{OM_1}=\overrightarrow{OO_1}+\overrightarrow{O_1M_1}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}-2\overrightarrow{OO_1},$$

és így

$$\overrightarrow{M_1M}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM_1}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}-(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}-2\overrightarrow{OO_1})=2\overrightarrow{OO_1}.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy MM_1 párhuzamos OO_1-gyel.

Megjegyzések. A feladat állítása a $k=1$ esetben is igaz. Ekkor a 4 pont a két háromszög közös Euler-egyenesére illeszkedik és M_1 egybeesik O-val. A megoldásból kiderült, hogy MM_1 kétszerese OO_1-nek.

Tichler Krisztián (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn. IV. o. t.)

II. megoldás. Könnyű megmutatni, hogy az ABC és $A_1B_1C_1$ háromszögek súlypontja közös. (Lásd pl. Bogdán Zoltán: Matematika-feladatok-ötletek-megoldások II. c. könyvének 62. feladatát csekély módosítással). A közös súlypont révén a feladatban szereplő pontok a *2. ábra* szerint helyezkednek el. Az Euler-egyenesre vonatkozó ismereteink szerint $MS=2\cdot SO$ és $M_1S=2\cdot SO_1$. Ezért a párhuzamos szelők tételének megfordítása alapján MM_1 párhuzamos OO_1-gyel.