

Tekintsük az 1. ábra szerint a dodekaéder HL tengelyét, és használjuk az ábra további jelöléseit.

1993-12-506-1.eps

1. ábra

Mozgassuk a H ponton átmenő HL -re merőleges S síkot H -tól L -ig. Mivel a dodekaéder HL körül 120° -kal elforgatva önmagába megy át, S -nek lesz egy olyan helyzete, amikor E, F és G illeszkedik rá. Eddig a helyzetig a síkmetszet háromszög. Az S síkot tovább mozgatva – egy az előbbivel analóg helyzetig – hatszög metszeteket kapunk. Nézzük először azt az esetet, amikor S az EA , illetve ED éleket egy-egy belső pontjukban metszi. Legyen a metszet két szomszédos éle c_1 és c_2 . Mivel a dodekaéder 120° -kal elforgatva önmagába megy át, ez a metszet pontosan akkor szabályos, ha $c_1 = c_2$. A 2. ábrán c_1 -et és c_2 -t ugyanazon az ötszöglapon tüntettük fel.

1993-12-506-2.eps

2. ábra

Ismeretes, hogy az a oldalú szabályos ötszög átlója $\frac{a}{2}(1 + \sqrt{5})$. Ha az $\frac{ED'}{ED}$ arányt k -val jelöljük, $c_1 = k \cdot \frac{a}{2}(1 + \sqrt{5})$. Másfelől a $BCDE$ trapézról $BE - c_2 = k(BE - a)$, amiből $c_2 = \frac{a}{2}(1 + \sqrt{5}) - k \cdot \frac{a}{2}(-1 + \sqrt{5})$.

A $c_1 = c_2$ feltételből $k = \frac{5 + \sqrt{5}}{10}$, és ekkor $c_1 = c_2 = \frac{a}{10}(5 + 3\sqrt{5})$.

Ha az S sík átmegy az A ponton, a metszet nem szabályos. Tovább mozgatva S -et, az AD -vel párhuzamos b_1 oldal csökken, b_2 pedig nő. Pontosán akkor lesz $b_1 = b_2$, ha a metsző sík illeszkedik a dodekaéder középpontjára, O -ra. Ekkor a dodekaéder középpontos szimmetriája miatt S átmegy az éppen metszett élek felezőpontján. A hatszög oldalát ekkor pl. az $ABCD$ trapéz középvonalaként számíthatjuk ki:

$$b_1 = b_2 = \frac{1}{2} \left(a + \frac{a}{2}(1 + \sqrt{5}) \right) = \frac{a}{4}(3 + \sqrt{5}).$$

Az S síkot tovább mozgatva, az első esethez hasonlóan újra szabályos hatszög metszetet találunk. Ezért 3 olyan sík van, amely HL -re merőleges, és a dodekaédert szabályos hatszögben metszi. Bármelyik ilyen síkhoz egyértelműen tartozik a HL tengely. Mivel a dodekaéder 20 csúcsa 10 tengelyt határoz meg, a keresett síkok száma 30.

Megyesi Zoltán (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn. III. o. t.)
dolgozata alapján