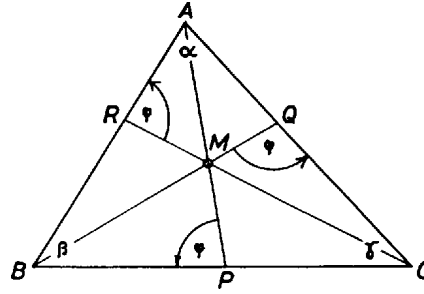
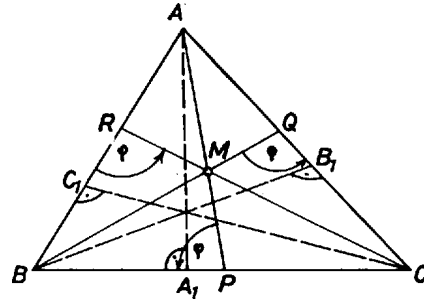


Legyen az AM és BC egyenesek metszéspontja P , és hasonlóan értelmezzük az *ábrák* Q és R pontjait.



1. ábra

A feladat szövegében szereplő hajlásszögeket φ -vel jelöljük ($\varphi \leq 90^\circ$). Könnyen látható, hogy a feltételnek kétféle *ábra* felelhet meg. Ha $\varphi = 90^\circ$, akkor készen vagyunk. Tegyük fel ezután, hogy az 1. *ábra* szerinti esetben $\varphi < 90^\circ$. Mivel φ külső szöge az AQB , BRC , CPA háromszögeknek, ezért $\alpha, \beta, \gamma < \varphi < 90^\circ$. Mindez azt jelenti, hogy az A, B, C csúcsokból induló magasságok rendre az ABP , BCQ , illetve CAR háromszögek belsejében haladnak. Ekkor azonban az A -ból, illetve B -ből kiinduló magasságok a BMP háromszög belsejében metszik egymást. Ezért, mivel a harmadik magasság a CAR háromszög belsejében halad, a háromszög három magasságvonala nem mehet át egy ponton. Ez ellentmondás, tehát M a háromszög magasságpontja.



2. ábra

Tegyük fel ezután, hogy a 2. *ábra* szerinti esetben $\varphi \leq 90^\circ$. Az A -ból, B -ből és C -ből induló magasságvonalak talppontját A_1 -gyel, B_1 -gyel és C_1 -gyel, a háromszög oldalait pedig a szokásos módon a, b, c -vel jelölve:

$$\begin{aligned} BP &= BA_1 + A_1P = c \cos \beta + c \sin \beta \operatorname{ctg} \varphi, \\ PC &= A_1C - A_1P = b \cos \gamma - b \sin \gamma \operatorname{ctg} \varphi, \\ CQ &= CB_1 + B_1Q = a \cos \gamma + a \sin \gamma \operatorname{ctg} \varphi, \\ QA &= B_1A - B_1Q = c \cos \alpha - c \sin \alpha \operatorname{ctg} \varphi, \\ AR &= AC_1 - RC_1 = b \cos \alpha - b \sin \alpha \operatorname{ctg} \varphi, \\ RB &= C_1B + RC_1 = a \cos \beta + a \sin \beta \operatorname{ctg} \varphi. \end{aligned}$$

Ceva tétele szerint

$$BP \cdot CQ \cdot AR = PC \cdot QA \cdot RB,$$

azaz

$$\begin{aligned} c(\cos \beta + \sin \beta \operatorname{ctg} \varphi)a(\cos \gamma + \sin \gamma \operatorname{ctg} \varphi)b(\cos \alpha - \sin \alpha \operatorname{ctg} \varphi) = \\ = b(\cos \gamma - \sin \gamma \operatorname{ctg} \varphi)c(\cos \alpha - \sin \alpha \operatorname{ctg} \varphi)a(\cos \beta + \sin \beta \operatorname{ctg} \varphi). \end{aligned}$$

Egyszerűsítés után ebből

$$\cos \gamma + \sin \gamma \operatorname{ctg} \varphi = \cos \gamma - \sin \gamma \operatorname{ctg} \varphi,$$

tehát $\varphi = 90^\circ$.