Az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy $x_2 > x_1$.
A bizonyítás során két esetet vizsgálunk.

I. eset: $x_2 - x_1 \le \frac{1}{2}$. Ekkor a feltétel szerint

$$|f(x_2) - f(x_1)| < |x_2 - x_1| \le \frac{1}{2}$$

II. eset: $x_2 - x_1 > \frac{1}{2}$. Alkalmazzuk a feltételt az $(x_1, 0)$ és $(1, x_2)$ számpárokra:

$$\begin{aligned} |f(0) - f(x_1)| &\le |0 - x_1| = x_1; \\ |f(x_2) - f(1)| &\le |x_2 - 1| = 1 - x_2. \end{aligned} \tag{1}$$

Ismeretes, hogy tetszőleges a, b valós számokra $|a + b| \le |a| + |b|$. Írjunk a helyére $(f(0) - f(x_1))$-et, b helyére $(f(x_2) - f(1))$-et:

$$|(f(0) - f(x_1)) + (f(x_2) - f(1))| \le$$
$$\le |f(0) - f(x_1)| + |f(x_2) - f(1)| \le x_1 + (1 - x_2) = 1 - (x_2 - x_1) < 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Mivel $f(0) = f(1)$, a bal oldalon

$$|(f(x_2) - f(x_1)) + (f(0) - f(1))| = |f(x_2) - f(x_1)|$$

áll, azaz
$$|f(x_2) - f(x_1)| < \frac{1}{2}.$$

Ezzel minden esetet megvizsgáltunk és az állítást igazoltuk.