

I. megoldás. Legyen az AB , illetve CD élben találkozó lapok szöge derékszög. Az *ábrán* feltüntettük ezeknek a lapoknak az AB , illetve CD oldalakhoz tartozó magasságait. Vegyünk fel egy AB -re merőleges S síkot, és vetítsük erre merőlegesen a tetraédert. A vetületet az *ábrán* láthatjuk.

1993-10-310-1.eps

Az ABC lap vetülete egy m_c , az ABD lap vetülete pedig egy m_d hosszúságú szakasz, amelyek a feltétel szerint derékszöget zárnak be. Ezért

$$(1) \quad m_c^2 + m_d^2 = (C'D')^2.$$

Az S síkra való merőleges vetítésben CD vetítősíkja párhuzamos AB -vel. Ebben a vetítősíkban van a $CDD'C'$ négyszög. Legyen ezen a síkon AB merőleges vetülete $A'B'$. Az AB és CD kitérő egyenesek α hajlásszöge ezen a síkon eredeti nagyságában látszik, amiért $C'D' = CD \cdot \sin \alpha$. Ennek alapján (1)-ből $m_c^2 + m_d^2 = CD^2 \cdot \sin^2 \alpha$. Mindkét oldalt $\frac{AB^2}{4}$ -gyel szorozva:

$$(2) \quad \left(\frac{AB \cdot m_c}{2} \right)^2 + \left(\frac{AB \cdot m_d}{2} \right)^2 = \left(\frac{AB \cdot CD \cdot \sin \alpha}{2} \right)^2.$$

Ugyanezzel a gondolatmenettel megmutathatjuk, hogy

$$(3) \quad \left(\frac{CD \cdot m_a}{2} \right)^2 + \left(\frac{CD \cdot m_b}{2} \right)^2 = \left(\frac{AB \cdot CD \cdot \sin \alpha}{2} \right)^2.$$

A (2) és (3) összefüggésekből következik a feladat állítása.

Dőtsch András (Szeged, Ságvári E. Gyak. Gimn. III. o. t.)

II. megoldás. Jelöljük pl. az ABC lap területét t_D -vel, a t_D hosszúságú és ABC síkjára merőleges (kifelé irányított) vektort $\vec{t}_D$ -vel. Ismert tétel, hogy egy poliéder kifelé irányított lap-területvektorainak összege zérusvektor. (Lásd pl. *Hajós György*: Bevezetés a geometriába c. könyvének 322. oldalán.) A feladat feltételei szerint $\vec{t}_A$ és $\vec{t}_B$, valamint $\vec{t}_C$ és $\vec{t}_D$ merőlegesek, ezért a skaláris szorzatuk nulla:

$$\vec{t}_A \cdot \vec{t}_B = 0 \quad \text{és} \quad \vec{t}_C \cdot \vec{t}_D = 0. \quad (4)$$

Az említett tétel szerint $\vec{t}_A + \vec{t}_B + \vec{t}_C + \vec{t}_D = \vec{0}$, azaz $\vec{t}_A + \vec{t}_B = -(\vec{t}_C + \vec{t}_D)$, amiből $(\vec{t}_A + \vec{t}_B)^2 = (\vec{t}_C + \vec{t}_D)^2$. A négyzetre emelést elvégezve és (4)-et fölhasználva:

$$t_A^2 + t_B^2 = t_C^2 + t_D^2.$$