

I. megoldás. Írjuk a bizonyítandó egyenlőtlenséget

$$(1) \quad m \leq \frac{\cos \frac{\gamma}{2}}{2 \sin \frac{\gamma}{2}} \cdot c + \frac{c}{\sin \frac{\gamma}{2}} - (a + b)$$

alakba.

Először bebizonyítjuk, hogy

$$(2) \quad m \leq \frac{\cos \frac{\gamma}{2}}{2 \sin \frac{\gamma}{2}} \cdot c,$$

majd pedig azt, hogy

$$(3) \quad \frac{c}{\sin \frac{\gamma}{2}} \geq a + b.$$

Ezekből már következik a feladat állítása.

1993-10-307-1.eps

1. ábra

A (2) állítás belátásához használjuk az 1. ábrát. Az ábra jelöléseivel $m = OF + OC \cdot \sin \varphi$, ami adott c és γ esetén csak φ -től függ, és akkor maximális, ha $\varphi = 90^\circ$. Ezért m akkor lesz a legnagyobb, ha átmegy a körülírt kör O középpontján, azaz ha háromszög egyenlő szárú. A 2. ábra alapján a maximális m -re $\tan \frac{\gamma}{2} = \frac{c}{2m}$, amiből $m = \frac{\cos \frac{\gamma}{2}}{2 \sin \frac{\gamma}{2}} \cdot c$.

Ezért általában $m \leq \frac{\cos \frac{\gamma}{2}}{2 \sin \frac{\gamma}{2}} \cdot c$.

1993-10-307-2.eps

2. ábra

1993-10-307-3.eps

3. ábra

A (3) egyenlőtlenség igazolásához tekintsük a 3. ábrát. A BDS derékszögű háromszögből $BS < BD$, és ha $a = b$, akkor $BS = BD$, ezért bármely háromszög esetén $BS \leq BD$. Hasonlóan kaphatjuk, hogy $AT \leq AD$. Ezért $BS + AT \leq BD + AD = AB = c$. Ebből, és a $BS = a \cdot \sin \frac{\gamma}{2}$, valamint $AT = b \cdot \sin \frac{\gamma}{2}$ összefüggésekből

$$(4) \quad a \cdot \sin \frac{\gamma}{2} + b \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \leq c,$$

és itt egyenlőség csak egyenlő szárú háromszög esetén áll fenn. Látjuk, hogy (4) ekvivalens (3)-mal, tehát igaz a feladat állítása. Egyenlőség pontosan akkor lesz, ha $a = b$.

Zsenei András (Bp., ELTE Radnóti M. Gyak. Gimn., IV. o. t.)

II. megoldás. Legyen $a + b + m = k \cdot c$. Az $a = 2r \cdot \sin \alpha$ összefüggés alapján $m = 2r \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta$, és így

$$k = \frac{a + b + m}{c} = \frac{2r \sin \alpha + 2r \sin \beta + 2r \sin \alpha \sin \beta}{2r \sin \gamma} = \frac{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \alpha \sin \beta}{\sin \gamma}.$$

Közismert összefüggésekkel:

$$\begin{aligned}
k &= \frac{2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha-\beta}{2} + \frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{2}}{\sin \gamma} = \\
&= \frac{2 \cos \frac{\gamma}{2} \cdot \cos \frac{\alpha-\beta}{2} + \frac{2 \cdot \cos^2 \frac{\alpha-\beta}{2} - 1 + \cos \gamma}{2}}{\sin \gamma} = \\
&= \frac{2 \cdot \cos^2 \frac{\alpha-\beta}{2} + 4 \cos \frac{\gamma}{2} \cdot \cos \frac{\alpha-\beta}{2} + \cos \gamma - 1}{2 \sin \gamma}.
\end{aligned}$$

Ez a kifejezés a pozitív $\cos \frac{\alpha-\beta}{2}$ -nek szigorúan monoton növekvő másodfokú függvénye. Tekintve, hogy $\cos \frac{\alpha-\beta}{2} \leq 1$, k akkor lesz legnagyobb, ha $\cos \frac{\alpha-\beta}{2} = 1$, azaz ha a háromszög egyenlő szárú. Így azt nyertük, hogy

$$k \leq \frac{4 \cdot \cos \frac{\gamma}{2} + 1 + \cos \gamma}{2 \cdot \sin \gamma} = \frac{4 \cdot \cos \frac{\gamma}{2} + 2 \cdot \cos^2 \frac{\gamma}{2}}{2 \cdot 2 \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}} = \frac{2 + \cos \frac{\gamma}{2}}{2 \cdot \sin \frac{\gamma}{2}}.$$

Tehát valóban

$$a + b + m \leq \frac{2 + \cos \frac{\gamma}{2}}{2 \cdot \sin \frac{\gamma}{2}} \cdot c.$$