I. megoldás. Mivel $z=-(x+y)$, ezért

$$\sin z=-\sin(x+y)=-2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2}.$$

Másrészt az ismert azonosság szerint

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}.$$

Ezeket felhasználva:

$$\begin{aligned}\sin x+\sin y+\sin z &\le |\sin x+\sin y|+|\sin z|=\\ &=2\left|\sin\frac{x+y}{2}\right|\cdot\left|\cos\frac{x-y}{2}\right|+2\left|\sin\frac{x+y}{2}\right|\cdot\left|\cos\frac{x+y}{2}\right|\le\\ &\le 2\left|\sin\frac{x+y}{2}\right|\left(1+\left|\cos\frac{x+y}{2}\right|\right).\end{aligned}$$

Az utóbbi szorzatot jelöljük A-val. Felhasználva a

$$\sin^2 t=1-\cos^2 t=(1-|\cos t|)(1+|\cos t|)$$

azonosságot, valamint a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget:

$$\begin{aligned}\frac{3}{4}A^2 &= 3\sin^2\frac{x+y}{2}\left(1+\left|\cos\frac{x+y}{2}\right|\right)^2=\\ &=\left(3-3\left|\cos\frac{x+y}{2}\right|\right)\cdot\left(1+\left|\cos\frac{x+y}{2}\right|\right)^3\le\\ &\le\left(\frac{\left(3-3\left|\cos\frac{x+y}{2}\right|\right)+3\cdot\left(1+\left|\cos\frac{x+y}{2}\right|\right)}{4}\right)^4=\left(\frac{3}{2}\right)^4=\frac{81}{16};\end{aligned}$$

ebből $A^2\le\dfrac{27}{4}$ és $A\le\dfrac{3\sqrt3}{2}$.

II. megoldás. Válasszuk meg az u,v,w számokat úgy, hogy azok a $[0,2\pi)$ intervallumba essenek, és $u-x, v-y, w-z$ a 2π többszörösei legyenek.

Ekkor, mivel a szinusz-függvény 2π szerint periodikus, $\sin x=\sin u$, $\sin y=\sin v$ és $\sin z=\sin w$. Másrészt $u+v+w=(u-x)+(v-y)+(w-z)$, tehát $u+v+w$ a 2π többszöröse.

Ha $\sin u$, $\sin v$, $\sin w$ közül valamelyik nem pozitív, akkor az összegük legfeljebb 2. Mivel pedig $2<\dfrac{3\sqrt3}{2}$, az állítás teljesül.

Feltehetjük tehát, hogy $\sin u, \sin v, \sin w$ mindegyike pozitív; ez azt jelenti, hogy u,v,w mindegyike a $(0,\pi)$ intervallumba esik. Ebben az esetben azonban $0<u+v+w<3\pi$. A 2π egyetlen ilyen többszöröse ő maga, tehát $u+v+w=2\pi$.

Mivel a szinusz-függvény a $(0,\pi)$ intervallumban szigorúan konkáv, a Jensen-egyenlőtlenség szerint

$$\frac{\sin u+\sin v+\sin w}{3}\le\sin\frac{u+v+w}{3}=\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt3}{2}.$$

Megjegyzés. Egyenlőség akkor áll fenn, ha $x=\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi$, $y=\dfrac{2\pi}{3}+2l\pi$ és $z=\dfrac{2\pi}{3}-2(k+l+1)\pi$, ahol k,l egész számok. Ez mindkét megoldásból leolvasható.