

Trapéz rombuszba írásán azt értjük, hogy a trapéz csúcsai a rombusz határán vannak. Ha a rombusz négyzet, akkor egyetlen maximális területű szimmetrikus trapéz írható bele, önmaga.

1993-09-259-1.eps

1. ábra

Az 1. ábrán a $KLMN$ rombuszba beírt szimmetrikus trapézt rajzoltunk meg, $AB \parallel CD$, és tükröztük a trapézt a rombusz O középpontjára. Ha AB , illetve CD felezőpontja F , illetve G , akkor K, F, G' , továbbá M, F', G egy egyenesen vannak, és

$$GF \perp AB, \quad G'F' \perp A'B'. \quad (1)$$

Tekintsük az $ABD'C'$ trapéz A_1B_1 középvonalát. Ennek H felezőpontja illeszkedik a KF egyenesre, és a H pont felezi az FG' szakaszt is. Hasonlót mondhatunk az $A'B'DC$ trapéz C_1D_1 középvonalának J felezőpontjáról. Könnyen beláthatjuk, hogy

$$A_1B_1 = C_1D_1 = \frac{AB + CD}{2}, \quad (2)$$

továbbá HJ párhuzamos GF -fel, és így (1) szerint $HJ \perp C_1D_1$ és $HJ \perp A_1B_1$. Ezért $A_1B_1C_1D_1$ olyan téglalap, amelynek középpontja O . Azt is láthatjuk, hogy e téglalap és a trapéz magassága egyenlő, $FG = HJ$, ezért (2) miatt a területük is megegyezik.

Nézzük meg ezután, hogyan szerkeszthető adott rombuszba téglalap. Mivel a rombusz és a téglalap O középpontja megegyezik, ezért a téglalap csúcsai O -tól egyenlő távolságra vannak, így illeszkednek egy O középpontú körre. A 2. ábrán láthatjuk, hogyan szerkeszthetők ilyen téglalapok.

1993-09-260-1.eps

2. ábra

Az ábra $A'_1B'_1C'_1D'_1$ téglalapjánál az $A'_1C'_1$ átló nagyobb, mint a rombusz kisebbik átlója, a többi esetben legfeljebb akkora. Az előbbinél mindegyik rombuszoldalon egy-egy téglalap csúcs lesz, és ekkor e téglalap valamelyik két oldalával párhuzamos alapokkal rendelkező beírt szimmetrikus trapéz szimmetriatengelye az egyik rombuszátló.

1993-09-260-2.eps

3. ábra

A 3. ábra jelöléseit használva számítsuk ki a beírt trapéz oldalai által levágott háromszögek területeinek t összegét:

$$t = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{2(1-x)y}{2} + \frac{(1-y)^2}{2} \right] \sin \alpha = \frac{(x-y)^2 + 1}{2} \sin \alpha. \text{ Ha } t \text{ minimális, akkor a beírt trapéz területe maximális}$$

lesz. Ez pontosan akkor következik be, ha $x = y$. Ez azt jelenti, hogy végtelen sok ilyen típusú trapéz van, ezek területe a rombusz területének a fele.

1993-09-260-3.eps

4. ábra

A 2. ábra további téglalapjai olyanok, hogy két szemközti oldaluk a rombusz két szemközti oldalára illeszkedik. Ilyen esetet rajzoltunk meg a 4. ábrán, ahol a rombusz hegyesszöge 60° -nál nagyobb. Az ilyen típusúak között maximális területű téglalap oldalait szaggatott vonallal rajzoltuk meg, vele egyenlő területű a $KNPL$ beírt szimmetrikus trapéz, és ez a terület most nagyobb, mint a rombusz területének a fele. (Ha a rombusz hegyesszöge legfeljebb 60° , akkor ez a terület legfeljebb a rombusz területének a fele.)

Olyan trapéz, mint a $KNPL$, négy van, hiszen a trapéz hosszabbik alapja a rombusz bármelyik oldalával egybeeshet, és két, velük egyenlő területű beírt téglalap létezik. A 4. ábra szerinti rombuszba tehát 6 maximális területű szimmetrikus trapéz írható.

Összefoglalva: Ha $LKN \angle \leq 60^\circ$, akkor a rombuszba végtelen sok maximális területű szimmetrikus trapéz írható, és a maximális terület a rombusz területének a fele. Ha $60^\circ < LKN \angle < 90^\circ$, akkor 6 maximális területű beírt szimmetrikus trapéz lesz (ezek területe nagyobb a rombusz félterületénél), végül ha a rombusz négyzet, akkor csak egy (saját maga).

Megjegyzés. A beírást általánosabban is értelmezhetjük volna, éspedig úgy, hogy a trapéz minden csúcsa a rombusznak határpontja vagy belső pontja legyen. A feladat kérdésére adandó válasz azonban ekkor is ugyanaz lesz.