I. megoldás. Először megmutatjuk, hogy C) végrehajtása után is teljesülni fog a B) feltétel (az A) természetesen mindig tejesülni fog). Legyen V az a város, amelynek kivezető útjait megfordítják, és tegyük fel, hogy ezzel kör keletkezett (olyan útvonal, amelyen egy adott városból kiindulva oda visszajutunk úgy, hogy mindig menetirány szerint haladunk). A kör nem tartalmazhatja V-t, mert C) végrehajtása után V-ből nem indul ki egyetlen kifelé vezető útszakasz sem. Ha viszont a kör nem tartalmazza V-t, akkor a kör útszakaszai a C) végrehajtása előtti állapotban maradtak. Ez pedig azt jelentené, hogy már C) végrehajtása előtt is létezett a kör (ami B) szerint nem lehet).

Másodszor azt bizonyítjuk, hogy ha A) és B) teljesül, akkor biztosan van olyan város, ahonnan minden út kifelé vezet. Tegyük föl, hogy nincs ilyen; megmutatjuk, hogy ekkor az úthálózat biztosan tartalmaz kört, ez pedig ellentmond B)-nek. Induljunk el egy tetszőleges városból, és haladjunk minden szakaszon a menetiránnyal szemben. Az indirekt feltevésünk szerint minden városba létezik bevezető útszakasz, ezért sohasem akadunk el.

Mivel véges sok város van, előbb-utóbb el kell jutnunk egy olyan városba, ahol már jártunk. Ez pedig azt jelenti, hogy tettünk egy körutazást, mindig a menetiránnyal szemben haladva. Ez az utazás visszafelé kört ad. Ezzel ellentmondásra jutottunk; mindig kell tehát léteznie olyan városnak, ahonnan minden út kifelé vezet.

Belátjuk, hogy mindegyik városra végtelen sokszor alkalmazzák a C) szabályt. Ez pedig azt is jelenti, hogy végtelen sok olyan hét lesz, amikor a fővárosból minden út kifelé vezet.

Mivel csak véges sok város van, és a C) intézkedést minden héten végrehajtják, lesz legalább egy olyan város (legyen ez V_1), amelyre végtelen sokszor alkalmazzák. Legyen V_2 a V_1 egyik szomszédja. Mielőtt V_1-re alkalmazzák C)-t, a két város közötti szakasz V_1-ből vezet V_2-be. Ahhoz, hogy V_1-re ismét alkalmazzák C)-t, az utat vissza kell fordítani. Ez viszont csak úgy lehetséges, ha közben valamikor V_2-re is alkalmazzák. Tehát, ha C)-t már kétszer hajtják végre V_1-ben, a kettő között V_2-ben is végre kell hajtani. Ebből pedig következik, hogy C)-t V_2-re is végtelen sokszor alkalmazzák.

Azt kaptuk tehát, hogy ha egy városra végtelen sokszor alkalmazzák C)-t, akkor a város szomszédaira is végtelen sokszor hajtják végre. Mivel az utakon mindegyik városból mindegyikbe el lehet jutni, ebből az állításunk következik.

Megjegyzés. Mivel minden útdarab irányítása végtelen sokszor változik meg, elég sok idő elteltével bármelyik városból bármelyik városba el lehet úgy jutni, hogy mindig az éppen akkor érvényes irányban haladunk.

II. megoldás. 1.) Az előző megoldáshoz hasonlóan bizonyítjuk be, hogy A) és B) mindig érvényben marad, és C)-t minden héten végrehajtják.

2.) Legyenek a fővárostól különböző városok $V_1, V_2, \ldots, V_n$, és jelölje h_i azt a legkisebb számot, ahányszor a menetiránnyal szemben kell haladni, ha hétközben a fővárosból V_i-be utazunk. Tekintsük az $S=\sum_{i=1}^{n} h_i$ összeget! Ez egy nemnegatív egész szám. Azt állítjuk, hogy ha C)-t nem a fővárosban hajtják végre, akkor S 1-gyel csökken.

Feltehetjük, hogy C)-t V_1-ben hajtják végre. Ekkor h_1 1-gyel csökken, mivel a V_1-be vezető utak utolsó darabja a jó irányba (befelé) fordul. A többi h_i ($i=2,\ldots,n$) nem változik, mert egy V_i-be vezető út irányaiban csak akkor történik változás, ha az út V_1-en keresztül vezet; ilyenkor viszont egy jó útszakaszt (a V_1-ből kifelé vezetőt) cserélünk rosszra, és egy rossz útszakaszt (a V_1-be befelé vezetőt) cserélünk jóra. Ezzel megmutattuk, hogy S értéke 1-gyel csökken.

Mivel $S \geqslant 0$ és 1-gyel csökken azokon a heteken, amikor C)-t nem a fővárosban hajtják végre, lehetetlen, hogy C)-t a fővárosban sohase hajtsák végre. (Amikor C)-t a fővárosban alkalmazzák, S értéke n-nel nő.)

Ha viszont C)-t a fővárosban alkalmazni lehet, akkor a fővárosból minden út kifelé vezet.

Csörnyei Mariann (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o. t.)