

I. megoldás. Legyen az egyenlet $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, a gyökök legyenek x_1, x_2, x_3 . A Viéte-formulák (a gyökök és együttthatók közötti összefüggések) szerint

$$\begin{aligned}a &= -(x_1 + x_2 + x_3); \\b &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3; \\c &= -x_1x_2x_3.\end{aligned}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy ezek alapján

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2 - 2b$$

és

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = -a^3 + 3ab - 3c.$$

A feladatban szereplő információk tehát a, b, c segítségével felírva:

$$\begin{aligned}(1) \quad & -c = a + 2, \\& a^2 - 2b = 10, \\& -a^3 + 3ab - 3c = 6.\end{aligned}$$

Az első egyenletből $c = a - 2$; a másodikból $b = \frac{a^2}{2} - 5$. Ezeket helyettesítsük be a harmadik egyenletbe:

$$-a^3 + 3a \left(\frac{a^2}{2} - 5 \right) - 3(a - 2) = 6.$$

Rendezve:

$$\begin{aligned}-2a^3 + 3a(a^2 - 10) - 6(a - 2) &= 12; \\a^3 - 36a &= 0; \\a(a - 6)(a + 6) &= 0.\end{aligned}$$

Ennek az egyenletnek három megoldása van: $a_1 = 0$, $a_2 = 6$, $a_3 = -6$. Az ezekhez tartozó b és c értékek $b = \frac{a^2}{2} - 5$ és $c = a - 2$ egyenletek alapján:

$$\begin{array}{lll}b_1 = -5, & b_2 = 13, & b_3 = 13; \\c_1 = -2, & c_2 = 4, & c_3 = -8.\end{array}$$

Erre a három számhármásra az (1) egyenletrendszer teljesül, azt viszont meg kell vizsgálnunk, hogy a megfelelő egyenleteknek valóban három valós gyöke van-e. A három egyenlet:

$$\begin{aligned}(2) \quad & x^3 - 5x - 2 = 0; \\(3) \quad & x^3 + 6x^2 + 13x + 4 = 0; \\(4) \quad & x^3 + 6x^2 + 13x - 8 = 0.\end{aligned}$$

Ismeretes, hogy az $y^3 + py + q = 0$ egyenlet gyökeinek száma az egyenlet diszkriminánsának, $\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$ -nek előjeléből olvasható ki:

Ha a diszkrimináns pozitív, akkor egyetlen, egyszeres valós gyök van. Ha negatív, akkor három különböző valós gyöke van az egyenletnek. Ha a diszkrimináns 0 és p, q valamelyike nem 0, akkor egy kétszeres és egy egyszeres valós gyöke van az egyenletnek. (Ha $p = q = 0$, akkor az $y = 0$ háromszoros gyök.)

A (2) egyenlet diszkriminánsa $\left(\frac{-5}{3}\right)^3 + \left(\frac{-2}{2}\right)^2$ negatív, tehát 3 különböző valós gyök van. A (3) és (4) egyenlet bal oldalát alakítsuk teljes köbbé, hogy a diszkriminánst ki tudjuk számítani:

$$\begin{aligned}(3') \quad & (x + 2)^3 + (x + 2) - 6 = 0; \\(4') \quad & (x - 2)^3 + (x - 2) + 2 = 0.\end{aligned}$$

Ezek diszkriminánsa $\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{-6}{2}\right)^2$, illetve $\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{2}\right)^2$; mindkettő pozitív. Ezeknek az egyenleteknek tehát csak egy gyöke van, így nem megoldásai a feladatnak.

A keresett egyenlet tehát:

$$x^3 - 5x - 2 = 0.$$

Megjegyzés. Azt hogy a (3) és (4) egyenleteknek csak egy gyöke valós, többen úgy próbálták bebizonyítani, hogy megmutatták: a baloldalon álló polinom deriváltja mindenhol pozitív; ebből következik, hogy a baloldal szigorúan monoton nő és nem lehet két különböző helyen 0.

Ez a megoldás ebben a formában hiányos, mert nem zárja ki a többszörös gyök lehetőségét. (A többszörös gyököt nem nehéz kizárni; pl. ahol többszörös gyök van, ott a derivált is 0, a mi esetünkben viszont pozitív.)

Ezek a dolgozatok 4 pontot kaptak.

II. megoldás. Legyen a keresett egyenlet ismét $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, a gyökök x_1, x_2, x_3 . A feladat szövege szerint

$$(5) \quad x_1 x_2 x_3 = x_1 + x_2 + x_3 + 2;$$

$$(6) \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 10;$$

$$(7) \quad x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 6.$$

Vonjuk ki (7)-ből (5) 3-szorosát és rendezzük át a következőképpen, felhasználva az

$$u^3 + v^3 + w^3 - 3uvw = (u + v + w)(u^2 - uv + v^2 - vw + w^2 - wu)$$

azonosságot:

$$(8) \quad \begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1 x_2 x_3 &= -3(x_1 + x_2 + x_3), \\ (x_1 + x_2 + x_3)(x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 - x_2 x_3 + x_3^2 - x_3 x_1 + 3) &= 0. \end{aligned}$$

A második tényező biztosan nem 0, mert

$$\begin{aligned} x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 - x_2 x_3 + x_3^2 - x_3 x_1 + 3 &= \\ = \frac{(x_1 - x_2)^2}{2} + \frac{(x_2 - x_3)^2}{2} + \frac{(x_3 - x_1)^2}{2} + 3 &\geq 3. \end{aligned}$$

Az egyenlet ezért csak úgy teljesülhet, ha $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Ekkor

$$\begin{aligned} a &= -(x_1 + x_2 + x_3) = 0, \\ c &= -x_1 x_2 x_3 = -(x_1 + x_2 + x_3 + 2) = -2 \text{ és} \\ b &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = \frac{(x_1 + x_2 + x_3)^2 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}{2} = \frac{0^2 - 10}{2} = -5. \end{aligned}$$

A keresett egyenlet tehát csak $x^3 - 5x - 2 = 0$ lehet.

Az, hogy ennek valóban három gyöke van, az I. megoldásban leírt módon bizonyítható.

Az (5) és a (6) egyenlet b és c választása alapján teljesül, a harmadik egyenlet pedig azért áll fenn, mert a választása miatt a (8) egyenlet teljesül, (7)-et pedig úgy kapjuk, hogy (8)-hoz hozzáadjuk (5) 3-szorosát.

A kapott egyenlet tehát valóban megoldása a feladatnak.