

Először f -et egyszerűbb alakba írjuk át az

$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$, a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ és a $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ azonosságok felhasználásával:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4 - 3(\sin^6 x + \cos^6 x)}{\sin x \cos x} = \\ &= \frac{4 - 3((\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x))}{\sin x \cos x} = \\ &= \frac{4 - 3(1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x)}{\sin x \cos x} = \frac{1 + 9(\sin x \cos x)^2}{\sin x \cos x} = \frac{2}{\sin 2x} + \frac{9}{2} \sin 2x. \end{aligned}$$

Legyen $y = \sin 2x$. Mivel $2x$ a $(0, \pi)$ intervallum tetszőleges pontja lehet, és ebben az intervallumban a szinuszfüggvény értékkészlete a $(0, 1]$ intervallum, a keresett halmaz a

$$g(y) = \frac{2}{y} + \frac{9}{2}y$$

függvény értékkészlete a $(0, 1]$ halmazon.

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján

$$g(y) = \frac{\frac{4}{y} + 9y}{2} \geq \sqrt{\frac{4}{y} \cdot 9y} = \sqrt{36} = 6.$$

Ha $y = \frac{2}{3}$, akkor egyenlőség áll fenn.

Az értékkészlet tehát része a $[6, \infty)$ intervallumnak és tartalmazza a 6-ot. Azt kell még megmutatni, hogy ha $c > 6$, akkor g felveszi c -t a $(0, 1]$ intervallumban, azaz a

$$\frac{2}{y} + \frac{9}{2}y = c$$

egyenletnek van megoldása $(0, 1]$ -ben.

Az egyenletet átalakítva:

$$(1) \quad \frac{9}{2}y^2 - cy + 2 = 0.$$

Ennek a diszkriminánsa $c^2 - 36 > 0$, tehát két valós gyök van. A gyökök szorzata $\frac{4}{9}$; ebből következik, hogy a két gyök azonos előjelű, és nem lehet mindkettő $\frac{2}{3}$ -nál nagyobb abszolút értékű.

Mivel a gyökök összege $\frac{2c}{9}$ pozitív, mindkét gyök pozitív.

Az (1) egyenletnek tehát két pozitív megoldása van; ezek közül a kisebbik legfeljebb $\frac{2}{3}$. A g függvény ezek szerint felveszi c -t a $\left(0, \frac{2}{3}\right]$ intervallumban.

Tehát az f függvény értékkészlete a $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumban a $[6, \infty)$ félegyenes.

Megjegyzés. Azt, hogy g felveszi c -t a $(0, 1]$ intervallumban, a Bolzano-tétel segítségével is igazolhatjuk. Mivel $\lim_{y \rightarrow 0+0} g(y) = +\infty$, a g függvény felvesz c -nél nagyobb értékeket, és $g\left(\frac{2}{3}\right) = 6 < c$ szerint c -nél kisebb értékeket is. A g folytonos, tehát a Bolzano-tétel szerint $(0$ és $\frac{2}{3}$ közötti helyen) c -t is fel kell vennie.