

Legyenek a háromszög oldalai a , b , c , egy megfelelő belső pont P , ennek az oldalaktól való távolságai d_a , d_b , d_c (az oldalaktól vett távolságot az oldalegyenesektől való távolságként tekintjük). A keresett P pontok esetén d_a , d_b , d_c -re teljesülniük kell a háromszög-egyenlőtlenségeknek. Messék a háromszög belső szögfelezői az oldalakat az A' , B' és C' pontokban az *ábra* szerint.

1993-04-164-1.eps

Először megmutatjuk, hogy pl. a $B'C'$ szakasz tetszőleges Q pontjának az oldalegyenesektől való x , y , z távolságaira $y + z = x$. Tekintve, hogy C' a C -ből induló szögfelező egy pontja, $C'K = C'K' = k$, és így a $C'B'K'$ és $QB'Y$ hasonló háromszögekből

$$(1) \quad \frac{QB'}{B'C'} = \frac{y}{k}, \quad \text{amiből} \quad y = \frac{QB'}{B'C'}k.$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$(2) \quad z = \frac{QC'}{B'C'}h.$$

A $C'QL$ és $C'B'M$ hasonló háromszögekből

$$(3) \quad \frac{QC'}{x - k} = \frac{QB'}{h - x}.$$

(3)-ból x -et kifejezve: $x = \frac{QB'}{B'C'}k + \frac{QC'}{B'C'}h$. Ezért (1) és (2) alapján $x = y + z$, amint azt állítottuk.

Tekintsük ezután az A középpontú középpontos hasonlóságot. Ha ennek aránya 1-nél nagyobb, és az előbbi Q pont képe P , akkor a nagyításban az előbbi y és z szakasz növekszik, x pedig csökken, ezért a P pontra teljesülni fog a $d_a < d_b + d_c$ egyenlőtlenség. Hasonlóan láthatjuk be, hogy $A'B'$ vagy $A'C'$ bármely pontját C -ből ill. B -ből 1-nél nagyobb arányú középpontos hasonlósággal leképezve a képpontra, teljesülni fognak a $d_c < d_a + d_b$, ill. $d_b < d_a + d_c$ egyenlőtlenségek.

Mindhárom egyenlőtlenség akkor és csak akkor teljesül, ha a P pont az $A'B'C'$ háromszög belső pontja. A keresett P pontok halmaza tehát az $A'B'C'$ háromszög belseje.

Hátra van még annak meghatározása, hogy az $A'B'C'$ háromszög területe, $T_{(A'B'C')}$ hányadrésze az ABC háromszög területének, $T_{(ABC)}$ -nek. Látható, hogy

$$T_{(A'B'C')} = T_{(ABC)} - T_{(AB'C')} - T_{(CA'B')} - T_{(BC'A')},$$

amiből

$$(4) \quad \frac{T_{(A'B'C')}}{T_{(ABC)}} = 1 - \frac{T_{(AB'C')}}{T_{(ABC)}} - \frac{T_{(CA'B')}}{T_{(ABC)}} - \frac{T_{(BC'A')}}{T_{(ABC)}}.$$

Számítsuk ki először $T_{(AB'C')}$ -t. A szögfelező osztási arányára vonatkozó tétel szerint $AC' = \frac{bc}{a+b}$, $AB' = \frac{bc}{a+c}$, ezért

$$T_{(AB'C')} = \frac{1}{2} \frac{b^2 c^2}{(a+b)(a+c)} \sin \alpha.$$

Így

$$\frac{T_{(AB'C')}}{T_{(ABC)}} = \frac{\frac{1}{2} \frac{b^2 c^2}{(a+b)(a+c)} \sin \alpha}{\frac{1}{2} bc \sin \alpha} = \frac{bc}{(a+b)(a+c)}.$$

Hasonlóan számíthatjuk ki a (4) jobb oldalán szereplő további arányokat. Ezért (4) így alakul:

$$\begin{aligned} \frac{T_{(A'B'C')}}{T_{(ABC)}} &= 1 - \frac{bc}{(a+b)(a+c)} - \frac{ab}{(c+a)(c+b)} - \frac{ac}{(b+a)(b+c)} = \\ &= \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}. \end{aligned}$$

Megjegyzés: A feladat megoldásai megtalálhatók a Középiskolai Matematikai Versenyek 1985 -1987. c. könyv 153-159. oldalain.