

Tetszőleges y valós számra jelölje $\|y\|$ az y távolságát a hozzá legközelebbi páratlan egész számtól; ez az érték mindig 0 és 1 közé esik.

Először megmutatjuk, hogy tetszőleges y valós számra

$$(1) \quad \left| \sin \frac{\pi}{2} y \right| \leq 1 - \|y\|^2.$$

Legyen az y -hoz legközelebbi páratlan szám $2k+1$. Ekkor $y = 2k+1 \pm \|y\|$ és a $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ azonosság alapján

$$\left| \sin \frac{\pi}{2} y \right| = \left| \sin \left((2k+1) \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{2} \|y\| \right) \right| = \cos \frac{\pi}{2} \|y\| = 1 - 2\sin^2 \frac{\pi}{4} \|y\|.$$

1993-04-158-1.eps

A $[0, 1]$ intervallumban az $x \mapsto \sin \frac{\pi}{4} x$ függvény konkáv, ezért grafikonja a $(0, 0)$, $\left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ végpontokat összekötő húr fölött van; így ebben az intervallumban $\sin \frac{\pi}{4} x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} x$. Ezt (2)-be írva kapjuk, hogy

$$1 - 2\sin^2 \frac{\pi}{4} \|y\| \leq 1 - 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \|y\| \right)^2 = 1 - \|y\|^2.$$

Másodszor azt bizonyítjuk be, hogy tetszőleges y valós számra

$$(3) \quad \max(\|y\|, \|\sqrt{2}y\|) \geq \frac{1}{(4 + 2\sqrt{2})|y| + 3}$$

(ahol $\max(\|b\|, \|\sqrt{2}y\|)$ a két szám közül a nagyobbat jelöli).

Legyen $\alpha = \max(\|y\|, \|\sqrt{2}y\|)$; az y -hoz, illetve $\sqrt{2}y$ -hoz legközelebbi páratlan szám p , illetve q ; továbbá $\varepsilon = y - p$ és $\delta = \sqrt{2}y - q$; ekkor $|\varepsilon| = \|y\| \leq \alpha$ és $|\delta| = \|\sqrt{2}y\| \leq \alpha$. Az ε és δ definíciója alapján

$$y = p + \varepsilon \quad \text{és} \quad \sqrt{2}y = q + \delta.$$

Emeljük ezeket négyzetre, majd az első kétszereséből vonjuk ki a másodikat:

$$0 = 2(p + \varepsilon)^2 - (q + \delta)^2 = 2(p^2 + 2p\varepsilon + \varepsilon^2) - (q^2 + 2q\delta + \delta^2).$$

Rendezzük át a következőképpen:

$$q^2 - 2p^2 = 4p\varepsilon + 2\varepsilon^2 - 2q\delta - \delta^2 = 4y\varepsilon - 2\varepsilon^2 - 2\sqrt{2}y\delta + \delta^2.$$

A bal oldalon egy páratlan egész szám áll (mivel q páratlan); figyelembe véve ezt, és hogy $\varepsilon^2 \leq |\varepsilon| \leq \alpha$, $\delta^2 \leq |\delta| \leq \alpha$, elvégezhetjük a következő becslést:

$$\begin{aligned} 1 \leq |q^2 - 2p^2| &= |4y\varepsilon - 2\varepsilon^2 - 2\sqrt{2}y\delta + \delta^2| \leq |4y\varepsilon| + 2\varepsilon^2 + |2\sqrt{2}y\delta| + \delta^2 \leq \\ &\leq 4\alpha|y| + 2\alpha + 2\sqrt{2}\alpha|y| + \alpha = \alpha((4 + 2\sqrt{2})|y| + 3). \end{aligned}$$

Ebből pedig (3) azonnal következik.

Az (1) és (3) becslések alapján nem nehéz bebizonyítani az állítást. Legyen $x = \frac{\pi}{2}y$, azaz $y = \frac{2}{\pi}x$. Ekkor

$$\begin{aligned} |\sin x + \sin \sqrt{2}x| &\leq |\sin x| + |\sin \sqrt{2}x| = \left| \sin \frac{\pi}{2} y \right| + \left| \sin \frac{\pi}{2} \sqrt{2}y \right| \leq \\ &\leq (1 - \|y\|^2) + (1 - \|\sqrt{2}y\|^2) \leq 2 - (\max(\|y\|, \|\sqrt{2}y\|))^2 \leq \\ &\leq 2 - \frac{1}{((4 + 2\sqrt{2})|y| + 3)^2} < 2 - \frac{1}{(7|y| + 3)^2}. \end{aligned}$$

Mivel $(7|y| + 3)^2 = 98y^2 + 18 - (7|y| - 3)^2 \leq 98y^2 + 18$, ebből következik, hogy

$$|\sin x + \sin \sqrt{2}x| \leq 2 - \frac{1}{98y^2 + 18} = 2 - \frac{1}{98 \left(\frac{2}{\pi}x\right)^2 + 18} =$$

$$2 - \frac{1}{\frac{392}{\pi^2}x^2 + 18} < 2 - \frac{1}{40x^2 + 18} < 2 - \frac{1}{100(x^2 + 1)}.$$

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Futó Gábor (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o. t.) dolgozata nyomán

Megjegyzések. 1. A nevezőben a 100-as együtthatót kisebbre (pl. 40-re) is ki lehet cserélni. A legnagyobb érték, amellyel az állítás *nem* igaz, körülbelül 7,8813. Ennél a kritikus értéknél már egyenlőség is fennállhat.

2. Feltehetnénk a következő kérdést is: ha c pozitív szám, akkor igaz-e, hogy

$$(4) \quad |\sin x + \sin \sqrt{2}x| < 2 - \frac{c}{x^2}$$

teljesül, ha x elég nagy, azaz létezik-e olyan x_0 szám, hogy tetszőleges x_0 -nál nagyobb x -re (4) teljesül?

A megoldáshoz hasonló, de pontosabb számolással be lehet látni, hogy ez $c > \frac{\pi^4}{768}$ esetén igaz. Azt is be lehet bizonyítani, hogy $c \leq \frac{\pi^4}{768}$ esetén pedig nem igaz, vagyis minden x_0 számhoz van olyan $x > x_0$ szám, amelyre (4) nem teljesül.