

Ismeretes, hogy az egyenlő oldalú tetraéder befoglalható egy téglatestbe. Legyen ennek a téglatestnek a térfogata V . A tetraéder minden lapja egy $\frac{V}{6}$ térfogatú gúlát vág le a téglatestből, ezért a tetraéder térfogata $\frac{V}{3}$. A tetraéder térfogatát még úgy is megkaphatjuk, hogy csúcsait a beírt gömb középpontjával összekötve, összegezzük a keletkezett négy gúla térfogatát. Ha egy lap területe T , akkor

$$(1) \quad \frac{V}{3} = 4 \frac{Tr}{3}.$$

Legyenek a téglatest élei x, y, z , a lapátlók pedig a, b, c . A Pitagorasz-tétel szerint $x^2 + y^2 = a^2$; $x^2 + z^2 = b^2$; $y^2 + z^2 = c^2$. Ezekből

$$(2) \quad x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}}, \quad y = \sqrt{\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}}, \quad z = \sqrt{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}}.$$

(2) alapján a téglatest térfogata:

$$V = xyz = \sqrt{\frac{(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2)(b^2 + c^2 - a^2)}{8}},$$

amiből ((1)-et fölhasználva és mindkét oldalt abc -vel osztva);

$$(3) \quad \frac{4Tr}{abc} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}},$$

majd beírva a háromszög területére vonatkozó $T = \frac{abc}{4R}$ képletet és a koszinusztételt, (3)-ból:

$$\frac{r}{R} = \sqrt{\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma},$$

azaz

$$r = R\sqrt{\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}.$$

Valkó Benedek (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., II. o. t.) dolgozata nyomán

Megjegyzés. 1. Az olyan tetraédert, amelynek lapjai egybevágók, egyenlő oldalú tetraédernek nevezzük.

2. A (2) összefüggésekből láthatjuk, hogy az egyenlő oldalú tetraéder lapjai hegyesszögű háromszögek.

3. Legyen a tetraéder köré írható gömb sugara S . Bebizonyítható – lásd pl. *Reiman István: A geometria és háttérterületei* c. könyvének 248. oldalán –, hogy $3r \leq S$. Ugyanezen könyv 89. oldalán azt is megtalálhatjuk, hogy az egyenlő oldalú tetraéder súlypontja, beírt- és körülírt gömbjének középpontja egybeesik. Utóbbi tétel könnyen belátható következménye, hogy $S = r^2 + R^2$, amiből feladatunk állítása segítségével

$$S^2 = R^2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma + R^2,$$

$$S = R\sqrt{1 + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}.$$

Tehát a körülírt gömb sugara r -hez hasonlóan kifejezhető α, β, γ és R segítségével.

1993-04-156-1.eps

Az előbb idézett tétel szerint

$$3R\sqrt{\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma} \geq R\sqrt{1 + \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma},$$

amiből

$$(4) \quad \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \leq \frac{1}{8}.$$

A (4) eredmény egy önmagában is fontos trigonometriai egyenlőtlenség, gondolatmenetünkben hegyesszögű háromszögekre következik, tompaszögű és derékszögű háromszögekre pedig nyilvánvalóan igaz.

4. Minden tetraéder befoglalható egy paralelepipedonba úgy, hogy a tetraéder élei a paralelepipedon lapátlói legyenek. Ezt belátandó, jelöljük az $ABCD$ tetraéder három, egy csúcsból kiinduló élére fektetett $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}$ vektort rendre $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ -vel. Olyan $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ vektorokat keresünk, amelyekre $\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{a}, \mathbf{z} - \mathbf{y} = \mathbf{c}, \mathbf{x} + \mathbf{z} = \mathbf{b}$. Ezt az $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ -re vonatkozó egyenletrendszert könnyen megoldhatjuk, és azt kapjuk, hogy a követelményeknek egyetlen vektorhármas (és egyetlen paralelepipedon) tesz eleget, és pedig

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}), \quad \mathbf{y} = \frac{1}{2}(-\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}), \quad \mathbf{z} = \frac{1}{2}(-\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}).$$