

Toljuk el az ABC és az $A_2B_2C_2$ háromszöget úgy, hogy A és A_2 képe A_1 legyen. Használjuk az *ábra* további jelöléseit. Az eltolás révén

$$(1) \quad A_1A = C'C \quad \text{és} \quad A_1A_2 = C'_2C_2.$$

1993-02-067-1.eps

Feltételeinkből következik, hogy $\frac{C_1C}{C_1C_2} = \frac{A_1A}{A_1A_2}$, ezért (1) alapján

$$(2) \quad \frac{C_1C}{C_1C_2} = \frac{C'C}{C'_2C_2}.$$

Az eltolások folytán a két ívvel jelölt szögek megegyeznek. Így a párhuzamos szelők tétele szerint a C_1CC' és $C_1C_2C'_2$ háromszögek hasonlóak. Ezért a C_1 , C' és C'_2 pontok egy egyenesen vannak, és

$$(3) \quad \frac{C_1C'}{C'C'_2} = \frac{C_1C}{CC_2}.$$

Ugyanígy megmutatható, hogy B_1 , B' és B'_2 is egy egyenesen van, és

$$(4) \quad \frac{B_1B'}{B'B'_2} = \frac{B_1B}{BB_2} = \frac{C_1C}{CC_2}.$$

Tekintsük most az A_1 középpontú α szögű $\frac{A_1C_1}{A_1B_1}$ arányú forgatva nyújtást. Ez a transzformáció a B_1 pontot a C_1 -be, a B'_2 pontot a C'_2 -be viszi át. Mivel ez egy hasonlósági transzformáció, ezért a $B_1B'_2$ szakasz B' osztópontját a $C_1C'_2$ szakasz C' osztópontjába viszi át, hiszen (3) és (4) szerint a B' pont ugyanolyan arányban osztja az előbbi szakaszt, mint C' az utóbbit. Tehát $B'A_1C' \sphericalangle = \alpha$, és $\frac{A_1C'}{A_1B'} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1}$, ami azt jelenti, hogy $A_1B'C'$ háromszög hasonló az $A_1B_1C_1$ háromszöghöz; de akkor ugyanez áll fenn a vele egybevágó ABC háromszögre is.

Megjegyzés. A bizonyítás a komplex számok segítségével is elvégezhető, amint azt – többek között – *prof. Walter Janous* innsbrucki olvasónk is megjegyezte. Tekintsük e célból a sík egy tetszőlegesen választott pontjából az A_i , B_i , C_i pontokba mutató $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i$, $\mathbf{c}_i$ vektorokat komplex számoknak. A feladat feltételei szerint (valamely z komplex számmal)

$$(5) \quad \frac{\mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1}{\mathbf{a}_1 - \mathbf{c}_1} = \frac{\mathbf{a}_2 - \mathbf{b}_2}{\mathbf{a}_2 - \mathbf{c}_2} = z.$$

Az origóból az A , B , C pontokba mutató $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorok:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= t\mathbf{a}_1 + (1-t)\mathbf{a}_2, \\ \mathbf{b} &= t\mathbf{b}_1 + (1-t)\mathbf{b}_2, \\ \mathbf{c} &= t\mathbf{c}_1 + (1-t)\mathbf{c}_2, \end{aligned}$$

ahol t valós szám. Így (5) figyelembevételével

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{a} - \mathbf{b}}{\mathbf{a} - \mathbf{c}} &= \frac{t(\mathbf{a}_1 - \mathbf{b}_1) + (1-t)(\mathbf{a}_2 - \mathbf{b}_2)}{t(\mathbf{a}_1 - \mathbf{c}_1) + (1-t)(\mathbf{a}_2 - \mathbf{c}_2)} = \\ &= \frac{tz(\mathbf{a}_1 - \mathbf{c}_1) + (1-t)z(\mathbf{a}_2 - \mathbf{c}_2)}{t(\mathbf{a}_1 - \mathbf{c}_1) + (1-t)(\mathbf{a}_2 - \mathbf{c}_2)} = z = \frac{\mathbf{a}_i - \mathbf{b}_i}{\mathbf{a}_i - \mathbf{c}_i}, \end{aligned}$$

ami éppen azt jelenti, hogy ABC hasonló az A_i , B_i , C_i háromszögekhez.