Jelöljük A_n-nel a keresett számot. Megmutatjuk, hogy $n \geqslant 3$ esetén $A_n = A_{n-1} + A_{n-2} + 1$.

Soroljuk a sorozatokat három osztályba:

1. A nem n-re végződő sorozatok száma A_{n-1}, mert ezekre pontosan annak kell teljesülni, hogy $1 \leqslant a_1 < a_2 < \ldots < a_k \leqslant n-1$, és minden tag az indexével azonos paritású.

2. Az a sorozat, amelynek utolsó tagja n és nem tartalmaz $(n-1)$-nél kisebb elemet. Ilyen pontosan egy van: páratlan n esetén az egy darab n-esből álló, páros n esetén pedig az $(n-1)$, n sorozat.

3. Azok a sorozatok, amelyek utolsó tagja n és tartalmaznak $(n-1)$-nél kisebb elemet. Ezeket úgy kapjuk, hogy veszünk egy $(n-2)$-nél nem nagyobb elemekből álló sorozatot (az ilyenek száma A_{n-2}); ha ennek legnagyobb eleme n-nel azonos paritású, akkor a sorozathoz hozzátesszük az $(n-1)$ és n számokat, ha pedig az utolsó elem n-nel ellentétes paritású, akkor az n számot (minden esetben csak egyféleképpen lehet a sorozatot folytatni).

A háromféle sorozatból összesen $A_{n-1} + A_{n-2} + 1$ darab van, a rekurziót igazoltuk.

Legyen f_n az n-edik Fibonacci-szám ($f_0 = 0, f_1 = 1, f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$). Teljes indukcióval igazoljuk, hogy $A_n = f_{n+2} - 1$.

Ha $n = 1$, akkor 1 sorozat van: az egyetlen 1-esből álló, tehát $A_1 = 1 = f_3 - 1$.

Ha $n = 2$, akkor az (1) és az $(1, 2)$ sorozatokra teljesül a feltétel, tehát $A_2 = 2 = f_4 - 1$.

Az állítás tehát teljesül $n = 1$-re és $n = 2$-re. Legyen $k \geqslant 3$ és tegyük fel, hogy teljesül $n = k-1$-re és $n = k-2$-re. Ekkor a bizonyított rekurzió és a Fibonacci-sorozat definíciója alapján

$$A_k = A_{k-1} + A_{k-2} + 1 = (f_{k+1} - 1) + (f_k - 1) + 1 = (f_{k+1} + f_k) - 1 = f_{k+2} - 1,$$

vagyis az állítás $n = k$-ra is igaz.

Tehát a kérdéses sorozatok száma $f_{n+2} - 1$.

Megjegyzés. Ismeretes, hogy

$$f_n = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n}{\sqrt{5}}.$$

Ennek felhasználásával explicit képletet is nyerhetünk A_n-re:

$$A_n = \frac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+2} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+2}}{\sqrt{5}} - 1.$$

Tichler Krisztián (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., IV. o. t.)