

Az $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ függvényre $f(1) = 1$, és tetszőleges x, y egész számokra

$$(1) \quad f(x+y)(f(x) - f(y)) = f(x-y)(f(x) + f(y)).$$

Határozzuk meg f -et.

Megoldás. Helyettesítsük be az $x = y = 1$ értéket:

$$f(2)(f(1) - f(1)) = f(0)(f(1) + f(1)), \quad \text{azaz} \quad f(0) = 0.$$

Helyettesítsük be az $x = 0, y = t$ számpárt, ahol t tetszőleges egész szám:

$$f(0+t)(f(0) - f(t)) = f(0-t)(f(0) + f(t)) \quad \text{és így} \\ 0 = f(t)(f(t) + f(-t)).$$

Ha $f(t) \neq 0$, akkor $f(-t) = -f(t)$. Ha $f(t) = 0$, akkor az $x = 0, y = -t$ helyettesítéssel:

$$0 = f(-t)(f(t) + f(-t)) = f^2(-t)$$

adódik, amiből $f(-t)$ is 0. Azt kaptuk tehát, hogy tetszőleges t -re

$$f(-t) = -f(t),$$

vagyis f páratlan függvény.

Helyettesítsünk be most $x = 2, y = 1$ -et

$$(f(3)(f(2) - f(1)) = f(1)(f(2) + f(1)).$$

Az $f(1) = 1$ -et figyelembe véve, és rendezve:

$$(f(3) - 1)(f(2) - 1) = 2.$$

Ez négyféleképpen lehetséges:

- a) $f(2) = 2, \quad f(3) = 3;$
- b) $f(2) = 3, \quad f(3) = 2;$
- c) $f(2) = 0, \quad f(3) = -1;$
- d) $f(2) = -1, \quad f(3) = 0.$

Az esetek vizsgálata során többször fel fogjuk használni azt az összefüggést, amit az $x = t, y = 1$ helyettesítéssel nyerünk (1)-ből:

$$f(t+1)(f(t) - f(1)) = f(t-1)(f(t) + f(1)), \quad \text{azaz} \\ f(t+1)(f(t) - 1) = f(t-1)(f(t) + 1).$$

Ebből

$$(2) \quad f(t+1) = \frac{f(t-1)(f(t)+1)}{f(t)-1}, \quad \text{ha} \quad f(t) \neq 1.$$

a) Bebizonyítjuk, hogy $f(t) = t$ minden t egész számra. Ezt f páratlansága miatt elég nemnegatív t értékekre igazolni. Az eddigiek alapján ez $t = 0, 1, 2, 3$ -ra igaz; ha pedig $f(t) = t, f(t-1) = t-1$ és $t \geq 2$, akkor (2) alapján

$$f(t+1) = \frac{(t-1)(t+1)}{t-1} = t+1.$$

Az $f(t) = t$ függvény valóban megoldás, mert tetszőleges (x, y) -ra (1) mindkét oldalán $(x-y)(x+y)$ áll.

b) A (2) összefüggés alapján

$$f(4) = \frac{f(2)(f(3)+1)}{f(3)-1} = \frac{3 \cdot (2+1)}{2-1} = 9 \quad \text{és így} \\ f(5) = \frac{f(3)(f(4)+1)}{f(4)-1} = \frac{2 \cdot (9+1)}{9-1} = \frac{5}{2}.$$

Mivel ez nem egész szám, ez az eset nem lehetséges.

c) Megmutatjuk, hogy ebben az esetben tetszőleges k egész számra

$$f(4k) = 0; \\ f(4k+1) = 1; \\ f(4k+2) = 0; \\ f(4k+3) = -1.$$

A páratlanság miatt elég ezt nemnegatív k értékekre igazolni.

Az állítás $k = 0$ -ra igaz: $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 0$, $f(3) = -1$. Tegyük fel, hogy igaz $k = k_0$ -ra. Ekkor (2) alapján

$$f(4k_0 + 4) = \frac{f(4k_0 + 2)(f(4k_0 + 3) + 1)}{f(4k_0 + 3) - 1} = \frac{0 \cdot (-1 + 1)}{-1 - 1} = 0;$$

$$f(4k_0 + 5) = \frac{f(4k_0 + 3)(f(4k_0 + 4) + 1)}{f(4k_0 + 4) - 1} = \frac{(-1) \cdot (0 + 1)}{0 - 1} = 1;$$

Helyettesítsünk be (1)-be $x = 4k_0 + 5$, $y = 2$ -t:

$$f(4k_0 + 7)(f(4k_0 + 5) - f(2)) = f(4k_0 + 3)(f(4k_0 + 5) + f(2));$$

$$f(4k_0 + 7)(1 - 0) = (-1) \cdot (1 + 0),$$

vagyis $f(4k_0 + 7) = -1$.

Most helyettesítsünk be $x = 4k_0 + 6$, $y = 1$ -et:

$$f(4k_0 + 7)(f(4k_0 + 6) - f(1)) = f(4k_0 + 5)(f(4k_0 + 6) + f(1))$$

$$(-1)(f(4k_0 + 6) - 1) = 1 \cdot (f(4k_0 + 6) + 1).$$

Ebből azt kapjuk, hogy $f(4k_0 + 6) = 0$.

Ezzel az állításunkat igazoltuk.

Az f függvény megoldása a feladatnak. Ennek bizonyítása a következő táblázatban összefoglalt 16 eset vizsgálatával történhet (a táblázatban az (1) függvényegyenlet két oldala olvasható le az egyes esetekben):

	$x = 4k$	$x = 4k + 1$	$x = 4k + 2$	$x = 4k + 3$
$y = 4l$	$0 \cdot (0 - 0) =$ $= 0 \cdot (0 + 0)$	$1 \cdot (1 - 0) =$ $= 1 \cdot (1 + 0)$	$0 \cdot (0 - 0) =$ $= 0 \cdot (0 + 0)$	$(-1) \cdot (-1 - 0) =$ $= (-1)(-1 + 0)$
$y = 4l + 1$	$1 \cdot (0 - 1) =$ $= (-1) \cdot (0 + 1)$	$0 \cdot (1 - 1) =$ $= 0 \cdot (1 + 1)$	$(-1) \cdot (0 - 1) =$ $= 1 \cdot (0 + 1)$	$0 \cdot (-1 - 1) =$ $= 0 \cdot (-1 + 1)$
$y = 4l + 2$	$0 \cdot (0 - 0) =$ $= 0 \cdot (0 + 0) =$	$(-1) \cdot (1 - 0) =$ $= (-1) \cdot (1 + 0)$	$0 \cdot (0 - 0) =$ $= 0 \cdot (0 + 0)$	$1 \cdot (-1 - 0) =$ $= 1 \cdot (-1 + 0)$
$y = 4l + 3$	$(-1) \cdot (0 - (-1)) =$ $= 1 \cdot (0 + (-1))$	$0 \cdot (1 - (-1)) =$ $= 0 \cdot (1 + (-1))$	$1 \cdot (0 - (-1)) =$ $= (-1) \cdot (0 + (-1))$	$0 \cdot (-1 - (-1)) =$ $= 0 \cdot (-1 + (-1))$

Az (1) egyenlet mind a 16 esetben teljesül.

d) Bebizonyítjuk, hogy tetszőleges k egész számra

$$f(3k) = 0;$$

$$f(3k + 1) = 1;$$

$$f(3k + 2) = -1;$$

A páratlanság miatt ezt is elég nemnegatív k értékekre igazolni. A $k = 0$ esetben az állítás igaz; tegyük fel, hogy igaz $k = k_0$ -ra. Ekkor (2) alapján

$$f(3k_0 + 3) = \frac{f(3k_0 + 1)(f(3k_0 + 2) + 1)}{f(3k_0 + 2) - 1} = \frac{1 \cdot ((-1) + 1)}{(-1) - 1} = 0 \quad \text{és}$$

$$f(3k_0 + 4) = \frac{f(3k_0 + 2)(f(3k_0 + 3) + 1)}{f(3k_0 + 3) - 1} = \frac{(-1) \cdot (0 + 1)}{0 - 1} = 1.$$

Helyettesítsünk be (1)-be $x = 3k_0 + 4$, $y = 2$ -t:

$$f(3k_0 + 6)(f(3k_0 + 4) - f(2)) = f(3k_0 + 2)(f(3k_0 + 4) + f(2)),$$

$$f(3k_0 + 6)(1 - (-1)) = (-1)(1 + (-1)), \quad \text{amiből} \quad f(3k_0 + 6) = 0.$$

Most helyettesítsünk be $x = 3k_0 + 5$, $y = 1$ -et:

$$f(3k_0 + 6)(f(3k_0 + 5) - f(1)) = f(3k_0 + 4)(f(3k_0 + 5) + f(1)),$$

$$0 \cdot (f(3k_0 + 5) - 1) = 1 \cdot (f(3k_0 + 5) + 1), \quad \text{amiből} \quad f(3k_0 + 5) = -1.$$

Ezzel igazoltuk az állítást $k = k_0 + 1$ -re is.

Az f függvény megfelelő. A 9 esetet a c) esetekhez hasonlóan vizsgáljuk végig:

	$x = 3k$	$x = 3k + 1$	$x = 3k + 2$
$y = 3l$	$0 \cdot (0 - 0) =$ $= 0 \cdot (0 + 0)$	$1 \cdot (1 - 0) =$ $= 1 \cdot (1 + 0)$	$(-1) \cdot (-1 - 0) =$ $= (-1) \cdot (-1 + 0)$
$y = 3l + 1$	$1 \cdot (0 - 1) =$ $= (-1) \cdot (0 + 1)$	$(-1) \cdot (1 - 1) =$ $= 0 \cdot (1 + 1)$	$0 \cdot (-1 - 1) =$ $= 1 \cdot (-1 + 1)$
$y = 3l + 2$	$(-1) \cdot (0 - (-1)) =$ $= 1 \cdot (0 + (-1))$	$0 \cdot (1 - (-1)) =$ $= (-1) \cdot (1 + (-1))$	$1 \cdot (-1 - (-1)) =$ $= 0 \cdot (-1 + (-1))$

Az (1) függvényegyenletnek tehát három függvény tesz eleget: az $f_1(x) = x$, az

$$f_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = 2k \\ 1, & \text{ha } x = 4k + 1 \\ -1, & \text{ha } x = 4k + 3 \end{cases}$$

és az

$$f_3(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = 3k \\ 1, & \text{ha } x = 3k + 1 \\ -1, & \text{ha } x = 3k + 2 \end{cases}$$

függvény.