Tekintsük a feladatot megoldottnak. Jelöljük a háromszög csúcsait A,B,C,-vel, a szabályos n-szögek középpontjait pedig X,Y,Z-vel az ábra szerint.

1993-03-114-1.eps

Az Y körüli $\alpha=\frac{2\pi}{n}$ (irányított) szögű forgatás A-t C-be, az X körüli $\frac{2\pi}{n}$ szögű forgatás C-t B-be, végül a Z körüli $\frac{2\pi}{n}$ szögű forgatás B-t A-ba viszi át. Tehát a három forgatás egymásutánjának (szorzatának) az A fixpontja. Ismeretes, hogy egy α,β és γ szögű forgatás szorzata egy $\alpha+\beta+\gamma$ szögű forgatás, ha $\alpha+\beta+\gamma\neq 2k\pi$, illetve eltolás vagy identitás, ha $\alpha+\beta+\gamma=2k\pi$. Ennek bizonyítása – az eredőforgatás középpontjának szerkesztési módjával együtt – megtalálható *Rácz János*: Matematika feladatok – ötletek – megoldások c. könyvének 313–315. oldalán. A feladatot ezután úgy oldjuk meg, hogy megkeressük az Y, X illetve Z pontok körüli $\frac{2\pi}{n}$ szögű forgatások szorzatának fixpontját, ami esetünkben az A pont lesz. Mivel az $n=3$ esetben a három forgatás szögének összege $3\cdot\frac{2\pi}{3}=2\pi$, tegyük fel egyelőre, hogy $n\geqslant 4$. Forgassuk el a sík egy tetszőleges P pontját Y, majd X, majd pedig Z körül $\frac{2\pi}{n}$ -nel. Legyen P képe P'. Ha $P\equiv P'$, akkor P éppen az A pont, ha $P\not\equiv P'$, akkor az A pontot a PP' felező merőlegesén kell keresnünk úgy, hogy $PAP'\sphericalangle=3\cdot\frac{2\pi}{n}$ legyen. (Az A pont megszerkesztésének módját az előbb említett könyv hivatkozott lapjain is megtalálhatjuk.) Ezután a C pontot az A pont Y körüli $\frac{2\pi}{n}$. szöggel, B-t az A pont Z körüli $-\frac{2\pi}{n}$ szöggel való elforgatottjaként kapjuk. Mivel az $n\geqslant 4$ esetben A a forgatás (egyetlen) fixpontja, a feladatnak egy megoldása van.

Az $n=3$ esetben az ABC háromszög oldalaira kifelé írt szabályos háromszögek középpontjai szabályos háromszöget alkotnak. (Ennek bizonyítása megtalálható a Geometriai feladatok gyűjteménye I. 3160. feladat megoldásában.) Ez azt jelenti, hogy ha $n=3$, a feladat csak akkor oldható meg, ha az XYZ háromszög szabályos. Megmutatjuk, hogy ilyenkor viszont végtelen sok megoldás van. Legyen $A_1B_1C_1$ tetszőleges háromszög, az oldalaira kifelé szerkesztett szabályos háromszögek középpontjai X_1,Y_1,Z_1. Az előbbiek szerint az $X_1Y_1Z_1$ háromszög szabályos. Tekintsük azt a hasonlóságot, amelyik az $X_1Y_1Z_1$ háromszöget az XYZ-be viszi át. Legyen ebben a hasonlóságban az $A_1B_1C_1$ háromszög képe az ABC háromszög. Az ABC háromszög feladatunk egy megoldása.

Megjegyzés: Feladatunkkal egy időben Gy. 2772. gyakorlatként kitűztük az $n=4$-nek megfelelő esetet. A gyakorlat megoldása az 1992. évi 8–9. számban megjelent. Az ott közölt második megoldás szinte szóról-szóra alkalmazható akkor is, ha $n>4$.