

Az állítást n szerinti teljes indukcióval igazoljuk. Ha $n = 1$, akkor az állítás igaz, és a bal oldalon egyenlőség áll:

$$\frac{1}{(x+1)(x+2n)} \leq \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} < \frac{1}{(x+\frac{1}{2})(x+\frac{5}{2})} = \frac{1}{(x+1)(x+2) - \frac{3}{4}}.$$

Tegyük fel, hogy az állítás igaz $n = k$ -ra. Ahhoz, hogy $n = k+1$ -re is igaz legyen elégséges, ha

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{k+1}{(x+1)(x+2(k+1))} - \frac{k}{(x+1)(x+2k)} &< \frac{1}{x+2k+1} - \frac{1}{x+2k+2} < \\ &< \frac{k+1}{(x+\frac{1}{2})(x+2(k+1)+\frac{1}{2})} - \frac{k}{(x+\frac{1}{2})(x+2k+\frac{1}{2})}, \end{aligned}$$

hiszen ennyivel változnak meg az (1)-ben szereplő mennyiségek.

(2)-ben először a bal oldali egyenlőtlenséget igazoljuk:

$$\begin{aligned} \frac{k+1}{(x+1)(x+2(k+1))} - \frac{k}{(x+1)(x+2k)} &= \frac{(k+1)(x+2k) - k(x+2k+2)}{(x+1)(x+2k)(x+2k+2)} = \\ &= \frac{x}{(x+1)(x+2k)(x+2k+2)} = \frac{x(x+2k+1)}{(x+1)(x+2k)} \cdot \frac{1}{(x+2k+1)(x+2k+2)} = \\ &= \frac{x^2 + (2k+1)x}{x^2 + (2k+1)x + 2k} \cdot \left(\frac{1}{x+2k+1} - \frac{1}{x+2k+2} \right) < \frac{1}{x+2k+1} - \frac{1}{x+2k+2}. \end{aligned}$$

A jobb oldali egyenlőtlenség:

$$\begin{aligned} \frac{k+1}{(x+\frac{1}{2})(x+2(k+1)+\frac{1}{2})} - \frac{k}{(x+\frac{1}{2})(x+2k+\frac{1}{2})} &= \\ &= \frac{(k+1)(x+2k+\frac{1}{2}) - k(x+2k+\frac{5}{2})}{(x+\frac{1}{2})(x+2k+\frac{1}{2})(x+2k+\frac{5}{2})} = \\ &= \frac{x+\frac{1}{2}}{(x+\frac{1}{2})(x+2k+\frac{1}{2})(x+2k+\frac{5}{2})} = \frac{1}{(x+2k+\frac{1}{2})(x+2k+\frac{5}{2})} = \\ &= \frac{1}{x^2 + (4k+3)x + (4k^2 + 6k + \frac{5}{4})} > \frac{1}{x^2 + (4k+3)x + (4k^2 + 6k + 2)} = \\ &= \frac{1}{(x+2k+1)(x+2k+2)} = \frac{1}{x+2k+1} - \frac{1}{x+2k+2}. \end{aligned}$$

Ezzel az állítást igazoltuk.

Párniczky Benedek (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., II. o. t.) dolgozata alapján