

Tegyük fel, hogy András k -szor veszi ki és teszi be a pénzét a bankba az év folyamán. Legyen a közben eltelt időszakok hossza években kifejezve $h_0, h_1, h_2, \dots, h_k$ (tehát h_0 az első alkalomig, h_i az $i = 1, 2, \dots, k-1$ esetén az i -edik és $(i+1)$ -edik alkalom között, h_k a k -adik kivétel és visszatétel után eltelt idő). Mivel közben pontosan 1 év telik el, $h_0 + h_1 + h_2 + \dots + h_k = 1$.

A bank szabályai szerint h idő alatt a számlán levő pénz az $(1+h)$ -szorosára növekszik, tehát Andrásnak az év végén

$$100 \cdot (1+h_0)(1+h_1) \dots (1+h_k)$$

forintja lesz. A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség szerint

$$\begin{aligned} (1+h_0)(1+h_1) \dots (1+h_k) &\leq \left(\frac{(1+h_0) + (1+h_1) + \dots + (1+h_k)}{k+1} \right)^{k+1} = \\ &= \left(\frac{k+2}{k+1} \right)^{k+1} = \left(1 + \frac{1}{k+1} \right)^{k+1}. \end{aligned}$$

Ismeretes, hogy az $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ sorozat szigorúan monoton nő, és a határértéke $e = 2,71828 < 2,72$; a sorozat tagjai a monotonitás miatt kisebbek mint e , ezért

$$100(1+h_0)(1+h_1) \dots (1+h_k) \leq 100 \left(1 + \frac{1}{k+1} \right)^{k+1} < 100e < 272.$$

Ezzel az állítás első felét bebizonyítottuk.

Az idézett tétel szerint az is igaz, hogy ha n elég nagy, akkor $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 2,71$. Ha n ilyen, $k = n-1$ és $h_0 = h_1 = \dots = h_k = \frac{1}{n}$, akkor $100(1+h_0) \dots (1+h_k) = 100 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > 100 \cdot 2,71 = 271$. Ezzel az állítás második felét is igazoltuk.

Győry Máté (Debrecen, KLTE Gyak. Gimn. III. o. t.)

Megjegyzések. 1. Az állítás első fele az ismert $1+x \leq e^x$ egyenlőtlenség segítségével is igazolható:

$$100 \cdot (1+h_0)(1+h_1) \dots (1+h_k) \leq 100 \cdot e^{h_0} \cdot e^{h_1} \dots e^{h_k} = 100 \cdot e^{h_0+\dots+h_k} = 100 \cdot e.$$

2. A második részben a legkisebb megfelelő n a 164, vagyis $k = 163$. Ez azt jelenti, hogy ha András minden második nap megújítja a bankszámláját (és ha a bank a tört filléreket is figyelembe veszi!), akkor az év végén 271 forintnál több pénze lesz.