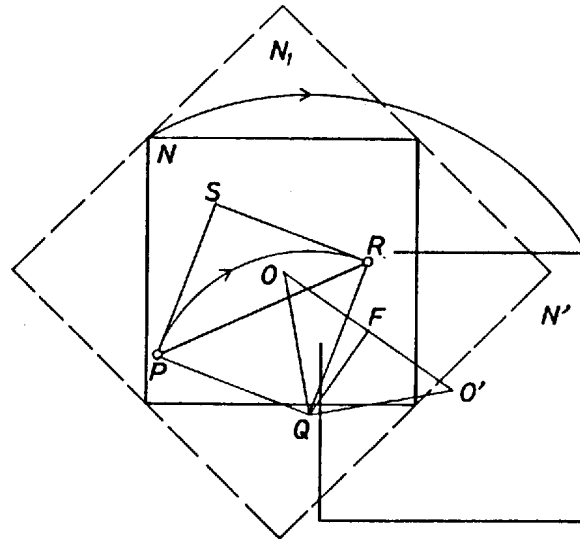


Jelölje  $N$  az adott négyzetlemez,  $O$  pedig annak középpontját. Tekintsük az  $N$  oldalai mint átlók fölé rajzolt négyzetlemez  $N_1$  unióját. Könnyen beláthatjuk, hogy  $N_1$  az  $N$ -ből  $O$  körüli  $45^\circ$ -os szögű és  $\sqrt{2}$  arányú forgatva nyújtással is származtatható. Megmutatjuk, hogy  $N_1$  a keresett síkrész.



Vegyünk ehhez egy tetszőleges  $PQRS$  négyzetlemez, amelynek  $PR$  átlója illeszkedik  $N$ -re. Be kell bizonyítanunk, hogy  $Q$  és  $S$  az  $N_1$  négyzetlemez pontjai. A  $P$  pontot egy  $Q$  körüli  $90^\circ$ -os elforgatással átvihetjük  $R$ -be. Ha ebben a forgatásban  $O$  képe  $O'$ , akkor  $N$  képe olyan  $O'$  középpontú  $N'$  négyzet, amelynek oldalai  $N$  oldalaival párhuzamosak. Az  $N$  és  $N'$  négyzetlemeznek  $R$  közös pontja, hiszen  $R \in N$  és  $R$  a  $P$  pont képe, tehát  $R \in N'$ . Az egybevágó és párhuzamos oldalú  $N$  és  $N'$  négyzetek közös része nem üres, ezért az  $OO'$  szakasz  $F$  felezőpontja a közös részben van, így  $F \in N$ . Mivel  $OOQ'$  egyenlő szárú derékszögű háromszög, és az  $OO'$  átfogó felezőpontja  $F$ , ezért  $OF : OQ = 1 : \sqrt{2}$ , tehát az  $O$  középpontú,  $45^\circ$ -os szögű,  $\sqrt{2}$  arányú forgatva nyújtás az  $F$  pontot a  $Q$ -ba viszi át.  $N_1$  említett származtatása miatt ebből következik, hogy  $Q$  az  $N_1$  négyzetlemez pontja. Hasonlót mondhatunk az  $S$  pontról. Ezzel látjuk, hogy a  $P, Q, R, S$  pontok illeszkednek  $N_1$ -re, és mivel  $N_1$  konvex, a  $PQRS$  négyzet is  $N_1$ -ben van. Mivel az  $N$  oldalai mint átlók fölé rajzolt négy négyzetlemez lefedi  $N_1$ -et, a keresett síkrész  $N_1$ .

*Kálmán Tamás* (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., III. o. t.) dolgozata alapján

*Megjegyzés.* A megoldásban hallgatólagosan fölhasználtuk, hogy  $N, N_1$  és a lefedő  $PQRS$  négyzetlapok zárt halmazok. Ha  $N$ -hez nem számítjuk hozzá a határt, akkor a fenti megoldáshoz hasonlóan megmutatható, hogy a keresett síkrész a nyitott  $N_1$  négyzet, akár nyitottnak, akár zártan tekintjük a lefedő négyzetlapokat.