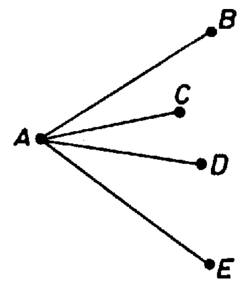
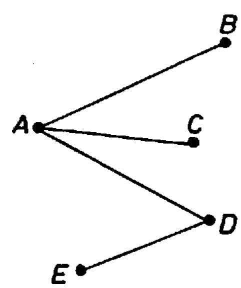
I. megoldás. Jelöljük a városokat A, B, C, D és E-vel. A négy szakasznak $4 \cdot 2 = 8$ végpontja van. Mindegyik végpont valamelyik városhoz tartozik, ezért lesz olyan város, amelyikből egynél több vasútvonal-szakasz indul ki. Ennek megfelelően három esetet különböztetünk meg.



1. ábra

1. Egy városból – ábránkon ez a város A – négy vasútvonal indul ki. Mivel A szerepét bármelyik város játszhatja, 5 ilyen vasúthálózat lehetséges.

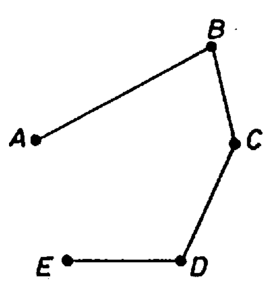
2. Egy városból – a *2. ábrán* ez az A – három vasútvonal indul ki.



2. ábra

E három szakasz A-tól különböző 3 végpontja közül valamelyik össze van kötve az ötödik várossal, ezért lesz egy olyan város is, amelyikből két szakasz indul ki. Azt a várost, amelyikből 3 vasútvonal indul ki, 5-féleképpen választhatjuk ki az 5 város közül, azt amelyikből 2 vonal indul ki 4-féleképpen, és a megmaradó 3-ból 3-féleképpen választható ki, hogy melyik lesz az előző mondatban említett „ötödik" város. Ez $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ eset.

3. Mindegyik városból legfeljebb 2 vasútvonal indul ki. Ezt az esetet rajzoltuk meg a *3. ábrán.*



3. ábra

Ha egy ilyen vasúthálózat szakaszait egymáshoz csatlakozóan bejárjuk, az öt várost egy permutációjuk sorrendjében érintjük. Ezek száma $5! = 120$, de a vasúthálózat szempontjából pl. az $ABCDE$ és az $EDCBA$ hálózatok azonosak; ezért a különböző lehetőségek száma most $\frac{1}{2} \cdot 5! = 60$.

Összesen tehát $5 + 60 + 60 = 125$ vasúthálózatot találtunk.

Megjegyzés. A feladat (és a megoldás) megfogalmazható a gráfelmélet terminológiájával is. Problémánk azt jelenti, hogy hányféle 5 szögpontú fa lehetséges, vagy általánosan: hányféle n szögpontú fa létezik.

II. megoldás. A feladat általános megoldása megtalálható Reiman István: A geometria és határterületei c. könyvének 318–319. oldalán. Az úgynevezett Cayley formula szerint az n csúcsú fák száma n^{n-2}.