

I. megoldás. Legyen $a + b + c = 1$, ahol $c \geq 0$, és alakítsuk át az egyenlőtlenséget a következőképpen:

$$\begin{aligned} 9ab(1-c) + (a+b)(a+b+c) &\geq a^2 + 10ab + b^2, \\ ab + bc + ca &\geq 9abc, \\ (ab + bc + ca)(a+b+c) &\geq 9abc, \\ a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 &\geq 6abc. \end{aligned}$$

Ez az egyenlőtlenség pedig a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján igaz:

$$\frac{a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2}{6} \geq \sqrt[6]{a^2b \cdot ab^2 \cdot b^2c \cdot bc^2 \cdot c^2a \cdot ca^2} = abc.$$

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a^2b = ab^2 = b^2c = bc^2 = c^2a = ca^2$, ami $a = b = c = \frac{1}{3}$ esetén teljesül.

Pál András (Budapest, Budai Nagy A. Gimn., IV. o. t.) dolgozata alapján

II. megoldás. Legyen $x = a + b$ és $y = ab$. A feladat feltételei szerint $0 < x \leq 1$, a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján pedig $0 < y \leq \frac{x^2}{4}$.

Az egyenlőtlenségbe behelyettesítve és átrendezve:

$$\begin{aligned} 9xy - x^2 - 8y + x &\geq 0, \\ y(9x - 8) + x(1 - x) &\geq 0. \end{aligned}$$

1. Ha $9x - 8 \geq 0$, akkor az egyenlőtlenség bal oldala pozitív.

2. Ha $9x - 8 < 0$, akkor a bal oldalt nem növeljük, ha y helyére a nála nem kisebb $\frac{x^2}{4}$ -et írjuk. Elég tehát ekkor azt bizonyítani, hogy

$$\frac{x^2}{4}(9x - 8) + x(1 - x) \geq 0.$$

Ez az egyenlőtlenség x -szel való osztás és rendezés után a következőképpen alakul:

$$9x^2 - 12x + 4 \geq 0, \text{ azaz } (3x - 2)^2 \geq 0,$$

ez pedig valóban igaz.

Egyenlőség akkor áll fenn, ha $3x - 2 = 0$, azaz $x = \frac{2}{3}$ (ebben az esetben $9x - 8 < 0$ valóban teljesül) és $y = \frac{x^2}{4} = \frac{1}{9}$.

Mivel $y = \frac{x^2}{4}$ pontosan akkor teljesül, ha $a = b$, ebből $a = b = \frac{1}{3}$ következik.

Egyenlőség tehát csak $a = b = \frac{1}{3}$ esetén lép fel.

Csörnyei Marianna (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., II. o. t.)