

Megmutatjuk, hogy a  $\{a\} + \left\{\frac{1}{a}\right\} = 1$  feltétel ekvivalens azzal, hogy  $a + \frac{1}{a}$  egész, és  $|a| \neq 1$ . Nyilván

$$\{a\} + \left\{\frac{1}{a}\right\} = a + \frac{1}{a} - [a] - \left[\frac{1}{a}\right].$$

Ha  $\{a\} + \left\{\frac{1}{a}\right\} = 1$ , akkor  $a + \frac{1}{a}$  egész, és az is igaz, hogy  $|a| \neq 1$ , mivel ellenkező esetben  $a$  és  $\frac{1}{a}$  is egész, és  $\{a\} + \left\{\frac{1}{a}\right\} = 0$  lenne. Megfordítva, ha  $a + \frac{1}{a}$  egész, és  $|a| \neq 1$ , akkor  $\{a\} + \left\{\frac{1}{a}\right\}$  is egész; mivel a törtrészfüggvény 1-nél kisebb nemnegatív értékeket vesz fel, a kifejezés értéke csak 0 és 1 lehet. Mivel azonban  $|a| \neq 1$ ,  $a$  és  $\frac{1}{a}$  közül valamelyik biztosan nem egész, tehát 0 nem lehet.

Észrevételünk szerint elég azt bizonyítani, hogy tetszőleges  $n$  pozitív egészre  $a^n + \frac{1}{a^n}$  egész szám, és  $|a^n| \neq 1$ . Ez utóbbi nyilván igaz, hiszen  $|a^n| = |a|^n$ .

Azt, hogy  $a^n + \frac{1}{a^n}$  egész, teljes indukcióval látjuk be. A feladat feltétele szerint ez  $n = 1$ -re igaz. Az  $n = 2$  esetben:

$$a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2, \text{ ami egész.}$$

Végül, ha  $a^{n-1} + \frac{1}{a^{n-1}}$  és  $a^n + \frac{1}{a^n}$  egész, akkor

$$a^{n+1} + \frac{1}{a^{n+1}} = \left(a + \frac{1}{a}\right) \left(a^n + \frac{1}{a^n}\right) - \left(a^{n-1} + \frac{1}{a^{n-1}}\right)$$

is egész ( $n = 2, 3, 4, \dots$ ). Ezzel az állítást igazoltuk.