

Ha az a oldalú $ABCD$ négyzetet a három egyenes hat egybevágó téglalapra osztja, akkor a téglalapok átlói – egyszersmind átmérői – $c = \sqrt{\left(\frac{a}{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a\frac{\sqrt{13}}{6}$ hosszúságúak (1. ábra).

1993-04-154-1.eps

1. ábra

Tételezzük fel, hogy létezik egy c -nél kisebb átmérőjű sokszöget adó f felosztás. Előrebocsátjuk és hivatkozás nélkül többször is alkalmazzuk Pasch axiómáját: Ha egy egyenes nem illeszkedik egy háromszög egyik csúcsára sem, akkor vagy pontosan két oldalát metszi, vagy egyiket sem, ha pedig illeszkedik valamelyik csúcsra, akkor legfeljebb egy oldalát metszi.

1993-04-154-2.eps

2. ábra

Világos, hogy a négyzetnek van olyan oldala, amelyet az f felosztásban egyetlen egyenes oszt ketté, hiszen a három egyenes legfeljebb 6 pontban metszheti a négyzet határvonalát, és ha lenne olyan oldal, amelyet egyik egyenes sem metsz, úgy az ezzel az oldallal szomszédos felosztás-rész átmérője legalább $a > c$. AB -nek választva egy ilyen oldalt, a metszéspont legyen M . Jelölje E a négyzet AB -re merőleges középvonalának AB -hez közelebbi harmadolópontját. Az ABE háromszög egyenlő szárú, és szárai c hosszúságúak. Az M -re illeszkedő egyenes nem metszi ABE egyik szarát, de egy másik metszi mind a kettőt, hiszen az f felosztásban c -nél kisebb átmérőjű sokszögek vannak. Ez a másik egyenes a BC -t N -ben, DA -t L -ben metszi (2. ábra). Az $LABN$ trapéz középvonala kisebb $\frac{a}{3}$ -nál, ezért az egyik alapja,

BN is. Ennélfogva NC nagyobb $\frac{2a}{3}$ -nál és ND hosszabb $2c$ -nél. ND felezőmerőlegesének a négyzetbe eső részét – lévén ND -vel azonos hosszúságú – NL mellett még egy egyenes osztja. Az ezzel való metszéspontot jelöljük Z -vel. Az NDZ (esetleg elfajult) háromszög alapja $2c$ -nél, szárai c -nél nagyobbak. Ennek a háromszögnek NL egyik oldalát sem metszi, a másik két egyenes az f felosztásra vonatkozó (indirekt) feltevésünk szerint osztja ND -t, de közülük a Z -re illeszkedő nem osztja a szárait; továbbá az egyik szarát – legyen ez NZ – nem osztja a másik sem (ugyanis ez a másik egyenes ND -n kívül már csak az egyik szarát metszheti). Ez azt jelenti, hogy az f felosztás nem létezik, hiszen $NZ > c$ ellentmond az f -re tett feltevésnek.

Végül, mivel $c = \frac{a\sqrt{13}}{6} \geq \sqrt{13}$, azért $a \geq 6$, tehát a négyzet oldala legalább 6.