

I. megoldás. Felhasználjuk a jól ismert

$$(1) \quad 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

és

$$(2) \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}$$

azonosságokat. A szokásos jelölésekkel

$$\begin{aligned} S_n &= a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = a_1^2 + (a_1 + d)^2 + (a_1 + 2d)^2 + \dots + (a_1 + (n-1)d)^2 = \\ &= a_1^2 + (a_1^2 + 2a_1d + d^2) + (a_1^2 + 4a_1d + 4d^2) + \dots + (a_1^2 + 2(n-1)a_1d + (n-1)^2d^2) = \\ &= na_1^2 + 2(1 + 2 + \dots + (n-1))a_1d + (1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2)d^2 = \\ (3) \quad &= na_1^2 + n(n-1)a_1d + \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}d^2. \end{aligned}$$

A feladatbeli sorozatban $d = 3$, tehát

$$(4) \quad S_n = na_1^2 + 3n(n-1)a_1 + \frac{3}{2}n(n-1)(2n-1).$$

A második feltétel szerint az első 2001 elem négyzetösszege kétszer annyi, mint az első 1001 elemé, azaz

$$S_{2001} = 2S_{1001}.$$

Felhasználva (4)-et:

$$2001a_1^2 + 12\,006\,000a_1 + 24\,018\,003\,000 = 2002a_1^2 + 6\,006\,000a_1 + 6\,009\,003\,000,$$

rendezve:

$$a_1^2 - 6\,000\,000a_1 - 18\,009\,000\,000 = 0;$$

tehát

$$a_1 = -3000 \quad \text{vagy} \quad 6\,003\,000.$$

II. megoldás. Ha észrevevesszük, hogy a feltételek nyilván teljesülnek a

$-3000, -2997, \dots, 3000$ sorozatra (amelynek 1001-edik eleme 0), láthatjuk: érdekesebb a sorozat elemeit az 1001-edik elem segítségével kifejezni. Ezzel a módszerrel nincs szükség a (2) azonosságra sem.

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{1001}^2 &= \\ &= (a_{1001} - 3000)^2 + (a_{1001} - 2997)^2 + \dots + (a_{1001} - 3)^2 + a_{1001}^2 = \\ &= 1001a_{1001}^2 - 6(1 + 2 + \dots + 1000)a_{1001} + 9(1^2 + 2^2 + \dots + 1000^2) = \\ &= 1001a_{1001}^2 - 3\,003\,000a_{1001} + 9(1^2 + 2^2 + \dots + 1000^2) \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} a_{1002}^2 + \dots + a_{2001}^2 &= \\ &= (a_{1001} + 3)^2 + (a_{1001} + 6)^2 + \dots + (a_{1001} + 3000)^2 = \\ &= (a_{1001}^2 + 6a_{1001} + 9) + (a_{1001}^2 + 12a_{1001} + 36) + \dots \\ &\quad \dots + (a_{1001}^2 + 6000a_{1001} + 9\,000\,000) = \\ &= 1000a_{1001}^2 + 6(1 + 2 + \dots + 1000)a_{1001} + 9(1^2 + 2^2 + \dots + 1000^2) = \\ &= 1000a_{1001}^2 + 3\,003\,000a_{1001} + 9(1^2 + 2^2 + \dots + 1000^2). \end{aligned}$$

A feltételek szerint ez a két összeg egyenlő, azaz

$$\begin{aligned} 1001a_{1001}^2 - 3\,003\,000a_{1001} + 9(1^2 + 2^2 + \dots + 1000^2) &= \\ = 1000a_{1001}^2 + 3\,003\,000a_{1001} + 9(1^2 + 2^2 + \dots + 1000^2). \end{aligned}$$

Rendezve:

$$a_{1001}^2 - 6\,006\,000a_{1001} = 0.$$

Ebből $a_{1001} = 0$ vagy $a_{1001} = 6\,006\,000$, tehát $a_1 = -3000$ vagy $6\,003\,000$.