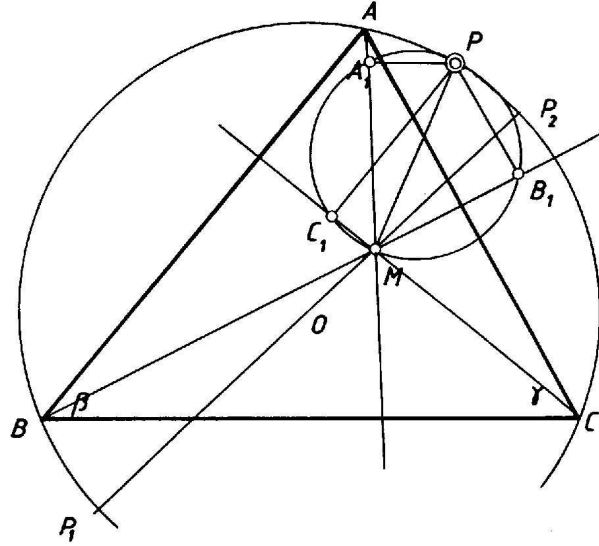


Először bebizonyítjuk, hogy az $A_1B_1C_1$ háromszög – ha létezik – hasonló az ABC háromszöghöz.



Ha P egybeesik M -mel, (ez esetben a háromszög derékszögű és M a derékszögű csúcs), akkor A_1, B_1, C_1 is egybeesik M -mel. Egyébként az A_1, B_1, C_1 pontok a PM szakasz Thalész-körén helyezkednek el. Feltételeink szerint $PA_1 \parallel BC$, $PB_1 \parallel AC$ és $PC_1 \parallel AB$. (Ha a P pont egybeesik valamelyik csúccsal pl. A -val, akkor PA_1 a PM átmérőjű kör A -beli érintője.) A felsorolt párhuzamosságok miatt pl. a PA_1 és PB_1 egyenesek szöge párhuzamos szárú szög a háromszög γ szögével, ezért $A_1PB_1 \angle$ vagy γ , vagy $\pi - \gamma$. Így az $A_1B_1C_1P$ húrnégyszögből $A_1C_1B_1 \angle$ vagy γ , vagy a $\pi - \gamma$. Hasonlóan beláthatjuk, hogy az $A_1B_1C_1 \angle$ vagy β , vagy $\pi - \beta$, illetve a $B_1A_1C_1 \angle$ vagy α , vagy $\pi - \alpha$. Ha a felsorolt esetekben a szögek aktuális értéke α, β, γ , akkor az $A_1B_1C_1$ és az ABC háromszögek valóban hasonlóak.

Egyébként még három esetre kell gondolnunk aszerint, hogy az $A_1B_1C_1$ háromszög szögei közül egy, kettő vagy mindhárom az α, β, γ szögek kiegészítő szöge:

1. Az $A_1B_1C_1$ háromszög szögei: $\pi - \alpha, \beta, \gamma$. Ekkor $\pi = \pi - \alpha + \beta + \gamma = \pi - 2\alpha + \alpha + \beta + \gamma = 2\pi - 2\alpha$, amiből $\alpha = \frac{\pi}{2}$, de akkor $\pi - \alpha = \alpha$, és a két háromszög most is hasonló.

2. Az $A_1B_1C_1$ háromszög szögei: $\pi - \alpha, \pi - \beta, \gamma$. Ez azonban lehetetlen, mert $\pi - \alpha + \pi - \beta + \gamma = \pi$ -ből $\alpha + \beta > \pi$, ellentmondás.

3. Az $A_1B_1C_1$ háromszög szögei: $\pi - \alpha, \pi - \beta, \pi - \gamma$, ami ugyancsak lehetetlen.

Beláttuk tehát, hogy a $P \equiv M$ esetet kivéve, az $A_1B_1C_1$ és az ABC háromszögek hasonlóak. Könnyű észrevenni, hogy – egymáshoz hasonló – háromszögek közül annak a területe nagyobb, amelyiknek a körülírt köre nagyobb; tehát minél nagyobb az MP átmérő, annál nagyobb lesz az $A_1B_1C_1$ háromszög területe. Ezért az MO egyenes metszi ki a legnagyobb és a legkisebb területű háromszöget meghatározó P_1 , illetve P_2 pontot az ABC körülírt köréből. Ha $M \equiv O$, akkor az MO egyenes ugyan határozatlan, ám ekkor a PM távolság állandó, és így $A_1B_1C_1$ területe is állandó.

Veres Gábor (Balassagyarmat, Balassi B. Gimn., III. o. t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. Az $A_1B_1C_1$ és ABC háromszögek hasonlóságának bizonyításához nem használtuk ki, hogy P a körülírt körön van. Ezért a hasonlóságra vonatkozó állítás a sík bármely pontjára érvényes.