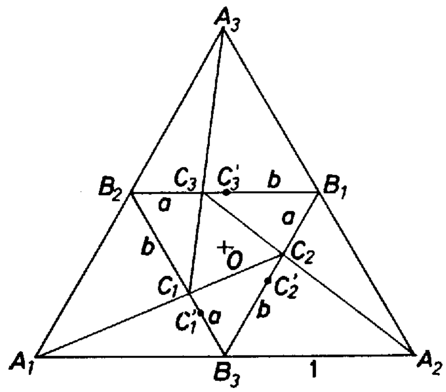
Jelölje O az $A_1A_2A_3$ szabályos háromszög középpontját. Tegyük fel, hogy $C_1,\ C_2,\ C_3$ megoldása a feladatnak.



1. ábra

Megmutatjuk, hogy ekkor más megoldás nem létezik. Ha ugyanis a $C_1',\ C_2',\ C_3'$ pontok is eleget tesznek a feladat követelményeinek, akkor például $C_3' \neq C_3$. Tételezzük fel, hogy C_3' a C_3B_1 szakasz belső pontja. Mivel $A_3,\ C_3',\ C_1'$ is egy egyenesbe esnek, azért C_1' a C_1B_3 belsejében fekszik. Hasonlóan $A_1,\ C_1',\ C_2'$ is egy egyenesen helyezkednek el, ezért C_2' csak B_3C_2 belsejében lehet. Így azonban az A_2C_3 egyenes elválasztja a $C_2',\ C_3'$ pontokat, tehát $A_2,\ C_2',\ C_3'$ nem lehetnek egy egyenesen. Ugyanerre az eredményre jutunk abban az esetben is, ha C_3' a B_2C_3 szakasz belsejében található; ezzel beláttuk, hogy a feladat megoldása (ha egyáltalán létezik) egyértelmű.

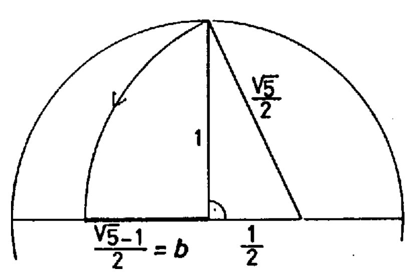
Forgassuk el az $A_1,\ A_2,\ A_3$, valamint a $C_1,\ C_2,\ C_3$ pontokat O körül $120°$-kal. Mivel az $A_1,\ A_2,\ A_3$ pontok egymás elforgatottjai, azért a $C_1,\ C_2,\ C_3$ képei ismét egy megoldást szolgáltatnak. Az egyértelműség miatt ez csak úgy lehetséges, hogy $C_1,\ C_2,\ C_3$ egymásba mennek át az elforgatás során, vagyis a $C_1C_2C_3$ háromszög is szabályos. Ebből következik, hogy

(1) $$C_2B_1 = C_3B_2 = C_1B_3 \qquad \text{és}$$
(2) $$B_3C_2 = B_1C_3 = B_2C_1.$$

Jelöljük az (1)-ben és (2)-ben szereplő szakaszok hosszát a-val, illetve b-vel, a $B_1B_2B_3$ háromszög oldala pedig legyen egységnyi. A $C_3C_2B_1$ és $A_2C_2B_3$ háromszögek hasonlók, mert szögeik páronként megegyeznek. Ezért $a:b=b:1$, és mivel $a+b=1$,

(3) $$a:b = b:(a+b).$$

Ez azt jelenti, hogy pl. a C_2 pont a B_1B_3 szakaszt az aranymetszés szerint osztja. A (3) egyenletet így írhatjuk: $b^2 = a(a+b)$ és mivel $a = 1-b$, $b^2 = 1-b$. Ebből az egyenletből $b = \dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, mivel b pozitív szám, $b = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. (A b szakasz szerkesztését a *2. ábrán* láthatjuk.)



2. ábra

Ha pl. a C_2 pontot a B_1B_3 szakaszon (3)-nak megfelelően megszerkesztjük, a B_1 és B_3-nál lévő $60°$-os szögek és az ezeket közbezáró oldalak arányának megegyezése révén az $A_2C_2B_3$ és $C_3C_2B_1$ háromszögek hasonlóak lesznek. Ennek következménye, hogy az $A_2,\ C_2,\ C_3$ pontok egy egyenesre illeszkednek. Hasonlóan igaz az A_3, C_3, C_1 és A_1, C_1, C_2 ponthármasokra, tehát szerkesztésünk helyes.

Megjegyzés. Vizsgáljuk meg azt az esetet, amikor az $A_1A_2A_3$ háromszög nem szabályos. Ismeretes – azok számára, akik tanultak az affin transzformációkról – hogy bármely két háromszöghöz egyértelműen létezik egy olyan affinitás (egyenestartó transzformáció), amely az egyik háromszög csúcsait a másik csúcsaiba viszi át. Tudjuk továbbá, hogy az affin transzformáció egy egyenes három pontjának osztási arányát (az osztóviszonyt) megtartja, ezért pl. felezőpontot felezőpontba, szakasz aranymetszés szerinti osztópontját aranymetszés szerinti osztópontba visz át. Így egy szabályos háromszöghöz és egy tetszőleges $A_1A_2A_3$ háromszöghöz található a fenti tulajdonságokkal rendelkező affin transzformáció. Ez azt jelenti, hogy a szabályos háromszögre talált eljárás a C_1, C_2, C_3 pontok megszerkesztésére bármely háromszögnél alkalmazható.

Csörnyei Marianna (Főv. Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.)