

I. megoldás. Az $(x - a)$ és $(x - b)$ gyöktényezők kiemelésével az $x^4 + x^3 - 1$ polinom

$$(1) \quad x^4 + x^3 - 1 = (x^2 + p_1x + q_1)(x^2 + p_2x + q_2)$$

alakban írható fel, ahol p_1, p_2, q_1, q_2 valós, ill. komplex számok, és $x^2 + p_1x + q_1 = (x - a)(x - b)$, azaz

$$(2) \quad p_1 = -(a + b) \text{ és } q_1 = ab.$$

(1) ből beszorzással kapjuk, hogy

$$q_1q_2 = -1; \quad (3) \quad q_1 + q_2 + p_1p_2 = 0; \quad (5)$$

$$q_1p_2 + p_1q_2 = 0; \quad (4) \quad p_1 + p_2 = 1; \quad (6)$$

(3)-ból és (6)-ból fejezzük ki q_2 -t és p_2 -t, majd helyettesítsük be (4)-be és (5)-be:

$$q_2 = -\frac{1}{q_1}, \text{ ahol } q_i \neq 0; p_2 = 1 - p_1;$$

$$(4') \quad q_1(1 - p_1) - \frac{p_1}{q_1} = 0;$$

$$(5') \quad q_1 - \frac{1}{q_1} + p_1(1 - p_1) = 0.$$

(4')-ből kifejezzük p_1 -et, és behelyettesítjük (5')-be:

$$p_1 = \frac{q_1^2}{1 + q_1^2}, \quad \text{ahol } 1 + q_1^2 \neq 0 \quad (\text{Ez teljesül, hisz ellenkező esetben } q_1 = 0 \text{ lenne})$$

$$(5'') \quad q_1 - \frac{1}{q_1} + \frac{q_1^2}{1 + q_1^2} \cdot \frac{1}{1 + q_1^2} = 0.$$

Ezt $q_1(1 + q_1^2)^2$ -nél megszorozva kapjuk, hogy

$$q_1^6 + q_1^4 + q_1^3 - q_1^2 - 1 = 0;$$

$q_1 = ab$ miatt ez éppen a bizonyítandó állítás.

Kárpáti Attila (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn. II. o. t.)

II. megoldás. A feladat állításánál valamivel többet bizonyítunk be. Tekintsünk egy f negyedfokú polinomot, amelynek (valós, ill. komplex) gyökei $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. Az f együtthatói segítségével konstruálunk egy olyan $F(x)$ hatodfokú polinomot, amelynek gyökei $\alpha_1\alpha_2, \alpha_1\alpha_3, \alpha_1\alpha_4, \alpha_2\alpha_3, \alpha_2\alpha_4$, és $\alpha_3\alpha_4$ lesznek.

Nilván feltehetjük, hogy f főegyütthatója 1, azaz $f(x)$

$$x^4 - c_1x^3 + c_2x^2 - c_3x + c_4$$

alakú, ahol a Viete-formulák szerint

$$c_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4;$$

$$c_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \dots + \alpha_3\alpha_4;$$

$$c_3 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \alpha_1\alpha_3\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4;$$

$$c_4 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4.$$

Legyen

$$\begin{aligned} F(x) &= (x - \alpha_1\alpha_2)(x - \alpha_1\alpha_3) \dots (x - \alpha_3\alpha_4) = \\ &= x^6 - k_1x^5 + k_2x^4 - k_3x^3 + k_4x^2 - k_5x + k_6, \end{aligned}$$

ahol ugyancsak a Viete-formulák szerint

$$k_1 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_1\alpha_4 + \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_4 + \alpha_3\alpha_4;$$

$$k_2 = (\alpha_1\alpha_2)(\alpha_1\alpha_3) + (\alpha_1\alpha_2)(\alpha_1\alpha_4) + \dots + (\alpha_2\alpha_4)(\alpha_3\alpha_4); \quad (15 \text{ tag})$$

$$k_3 = (\alpha_1\alpha_2)(\alpha_1\alpha_3)(\alpha_1\alpha_4) + \dots + (\alpha_2\alpha_3)(\alpha_2\alpha_4)(\alpha_3\alpha_4); \quad (20 \text{ tag})$$

$$k_4 = (\alpha_1\alpha_2)(\alpha_1\alpha_3)(\alpha_1\alpha_4)(\alpha_2\alpha_3) + \dots + (\alpha_1\alpha_4)(\alpha_2\alpha_3)(\alpha_2\alpha_4)(\alpha_3\alpha_4);$$

$$k_5 = (\alpha_1\alpha_2)(\alpha_1\alpha_3)(\alpha_1\alpha_4)(\alpha_2\alpha_3)(\alpha_2\alpha_4) + \dots + (\alpha_1\alpha_3)(\alpha_1\alpha_4)(\alpha_2\alpha_3)(\alpha_2\alpha_4)(\alpha_3\alpha_4);$$

$$k_6 = (\alpha_1\alpha_2)(\alpha_1\alpha_3)(\alpha_1\alpha_4)(\alpha_2\alpha_3)(\alpha_2\alpha_4)(\alpha_3\alpha_4);$$

Egyszerű számolással igazolható, hogy

$$\begin{aligned}(6) \quad & k_1 = c_2; \\ & k_2 = c_1 c_3 - c_4; \\ & k_3 = c_3^2 + c_4(c_1^2 - 2c_2); \\ & k_4 = c_4(c_1 c_2 - c_4); \\ & k_5 = c_4^2 c_2; \\ & k_6 = c_4^3.\end{aligned}$$

Alkalmazzuk a kapott összefüggéseket a feladatban szereplő $f(x) = x^4 + x^3 - 1$ polinomra:

$$\begin{aligned}c_1 = -1, \quad c_2 = c_3 = 0, \quad c_4 = -1; \text{ ezekből (6) alapján} \\ k_1 = 0, \quad k_2 = 1, \quad k_3 = -1, \quad k_4 = -1, \quad k_5 = 0 \text{ és } k_6 = -1, \\ \text{azaz } F(x) = x^6 + x^4 + x^3 - x^2 - 1.\end{aligned}$$

Megjegyzés Ha $\alpha_1 \alpha_2, \dots, \alpha_3 \alpha_4$ páronként különbözők, akkor F (konstans szorzótól eltekintve) egyértelmű. Ehhez nem elég az, hogy $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ páronként különbözők, hiszen pl. az $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ polinom gyökei (az 1-től különböző komplex ötödik egységgyökök) is páronként különbözők, mégis van két olyan gyökpár, amelyek szorzata egyaránt 1.

Futó Gábor (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., II. o. t.)