

**I. megoldás.** Ha  $n = 0$ , akkor az állítás az  $\binom{n}{k}$  együtthatónak  $k = 0$ -ra való, ismert kiterjesztéséből következik.

Legyen  $n \geq 1$ . Ekkor  $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n! \cdot n!}$  és  $\binom{2n}{n-1} = \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$ , amiből

$$(1) \quad n \cdot \binom{2n}{n} = (n+1) \cdot \binom{2n}{n-1}.$$

Mivel  $n$  és  $n+1$  relatív prímek, a bal oldalon álló  $n \cdot \binom{2n}{n}$  szorzat csak úgy lehet osztható  $(n+1)$ -gyel, ha  $\binom{2n}{n}$  osztható  $(n+1)$ -gyel.

*Megjegyzések* 1. Az (1) azonosságot  $n = 0$  esetén nem írhatjuk fel, ezért kellett ezt az esetet külön megvizsgálni.

2. (1)-et a következőképpen is átrendezhetjük:

$$\frac{\binom{2n}{n}}{n+1} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}.$$

Eszerint  $\frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$  két egész szám különbsége.

*Megjegyzés.* A  $\frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$  számot az  $n$ -edik Catalan-számnak nevezik. Többféle kombinatorikai jelentése van: ennyiféleképpen lehet zárójellezni egy  $(n+1)$ -tagú összeget, ennyiféleképpen lehet egy konvex  $(n+2)$ -szöget  $(n-1)$  átló behúzásával háromszögekre bontani stb.

Ha bevezetjük a  $C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$  jelölést, akkor teljesül a következő rekurzió:

$$C_{n+1} = C_0 C_n + C_1 C_{n-1} + C_2 C_{n-2} + \dots + C_n C_0.$$

Az állítás ebből is következik, bár már a rekurzió bizonyítása is hosszabb, mint maga a megoldás.

**II. megoldás.** Bebizonyítjuk, hogy tetszőleges  $p$  prímszámra  $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n! \cdot n!}$  prímtenyezős felbontásában a  $p$  kitevője legalább akkora, mint az  $(n+1)$  prímtenyezős felbontásában. (Ez ekvivalens az állítással.)

Legyen  $\alpha$  a  $p$  kitevője az  $(n+1)$  felbontásában. Ismeretes, hogy  $p$  kitevője  $(2n)!$ , illetve  $(n!)^2$  prímtenyezős felbontásában

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{2n}{p^i} \right], \text{ illetve } D = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \left[ \frac{n}{p^i} \right].$$

( $[x]$  az  $x$  egész részét jelöli.) Azt kell igazolnunk, hogy

$$(2) \quad S \geq \alpha + D.$$

Ehhez megmutatjuk, hogy

$$(3) \quad \left[ \frac{2n}{p^i} \right] = 1 + 2 \left[ \frac{n}{p^i} \right], \text{ ha } 1 \leq i \leq \alpha, \text{ és}$$

$$(4) \quad \left[ \frac{2n}{p^i} \right] \geq 2 \left[ \frac{n}{p^i} \right], \text{ ha } i > \alpha.$$

Ha ezeket az egyenlőtlenségeket összeadjuk ( $i$  mindazon értékeire, amelyekre  $\left[ \frac{2n}{p^i} \right] > 0$ ), éppen (2)-t kapjuk.

Legyen  $1 \leq i \leq \alpha$ . Mivel  $p^\alpha$  osztója  $(n+1)$ -nek,  $p^i$  is osztója  $(n+1)$ -nek. Legyen  $k = \frac{n+1}{p^i}$ , azaz  $n = p^i k - 1$ . Az előbbiek szerint  $k$  egész szám, ezért

$$\begin{aligned} \left[ \frac{2n}{p^i} \right] &= \left[ \frac{2p^i k - 2}{p^i} \right] = \left[ 2k - \frac{2}{p^i} \right] = 2k - 1 \text{ és} \\ 2 \left[ \frac{n}{p^i} \right] &= 2 \left[ \frac{p^i k - 1}{p^i} \right] = 2 \left[ k - \frac{1}{p^i} \right] = 2(k - 1) = 2k - 2. \end{aligned}$$

Ezzel (3)-at igazoltuk. Mivel pedig  $[2x] \geq 2[x]$  tetszőleges  $x$  valós számra, (4) is igaz.

Ezzel az állítást bebizonyítottuk.