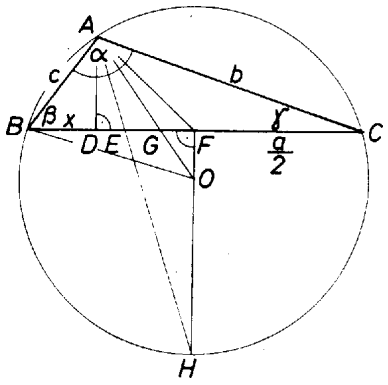
Legyen $O$ a körülírt kör középpontja, $G$ pedig $AO$ és $BC$ metszéspontja. Használjuk az ábra további jelöléseit is. Feltehetjük, hogy $AB < AC$. (Az $AB = AC$ esetben a feladat állítása nem érdekes.)




**I. megoldás**. A kerületi és középponti szögek tétele szerint $AOB\sphericalangle = 2\gamma$, ezért $BAO\sphericalangle = 90^\circ - \gamma$. Könnyen látható, hogy $BAD\sphericalangle = 90^\circ - \beta$ és $BAE\sphericalangle = \dfrac{\alpha}{2} = 90^\circ - \dfrac{\beta+\gamma}{2}$. Feltevésünk szerint $AB < AC$, ezért $\beta > \gamma$, így az előbb kiszámított szögekre:

$$BAD\sphericalangle < BAE\sphericalangle < BAO\sphericalangle.$$

Ennek alapján a pontok sorrendje a $BC$ oldalon: $B$, $D$, $E$, $F$, $C$. Mivel a háromszög tompaszögű, $O$ a háromszögön kívül van. Ezért $EG < EF$, és így elég azt megmutatni, hogy $DE < EG$. Számítsuk ki a $DEA$ és $EAG$ szögeket. Ezeket a korábban már meghatározott szögek különbségeként kaphatjuk:

$$DAE\sphericalangle = EAG\sphericalangle = \frac{\beta-\gamma}{2}.$$

Ez azt jelenti, hogy az $ADG$ derékszögű háromszögben $AE$ szögfelező. Mivel $AD < AG$, a szögfelező osztási arányára vonatkozó tételből láthatjuk, hogy $DE < EG$, amiből már következik a feladat állítása.

*Megjegyzés.* A megoldásból látható, hogy az $A$ csúcsnál lévő szög nagyságától függetlenül érvényes a következő tétel: A háromszög bármelyik magasságvonalának a vele egy csúcsból induló szögfelezőre vonatkozó tükörképe átmegy a körülírt kör középpontján.

**II. megoldás**. Ismeretes, hogy a $BC$ oldal felező merőlegese és az $A$ csúcsból húzott belső szögfelező a körülírt körön metszik egymást. Az $ADE$ és $HFE$ háromszögek hasonlóak. Világos, hogy $AD < HF$, hiszen $AD$ kisebb, mint egy, a $HO$ átmérőegyenessel párhuzamos húr fele, $HF$ pedig nagyobb, mint egy átmérő fele. De ha $AD < HF$, akkor az előbbi hasonlóság következtében $DE < EF$.

**III. megoldás**. Kifejezzük $DE$-t és $EF$-et a háromszög oldalaival, és összehasonlítjuk a két szakaszt. A szögfelezőre vonatkozó tétel szerint

$$\frac{c}{b} = \frac{BE}{a-BE}, \quad \text{amiből} \quad BE = \frac{a\cdot c}{b+c}.$$

A Pitagorasz tétel alapján $c^2 = x^2 + AD^2$ és $b^2 = (a-x)^2 + AD^2$, ezekből $x = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2a}$.

Most már kiszámíthatjuk $DE$-t:

$$DE = BE - BD = \frac{a\cdot c}{b+c} - \frac{a^2+c^2-b^2}{2a} = \frac{b-c}{2a(b+c)}\left[(b+c)^2 - a^2\right],$$

ahol fölhasználtuk, hogy $b > c$, és ezért a pontok sorrendje a $BC$ oldalon $B$, $D$, $E$, $F$, $C$.

Hasonló meggondolással $EF = BF - BE = \dfrac{a}{2} - \dfrac{a\cdot c}{b+c} = \dfrac{b-c}{2(b+c)}\cdot a$. A feladat állítása azt jelenti, hogy

$$\frac{b-c}{2a(b+c)}\left[(b+c)^2 - a^2\right] < \frac{b-c}{2(b+c)}\cdot a, \quad \text{azaz}$$
$$\frac{(b+c)^2-a^2}{a} < a, \quad \text{másképpen} \quad (b+c)^2 < 2a^2.$$

Elegendő tehát a legutóbb kapott egyenlőtlenséget igazolni. A koszinusztétel szerint $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha$, amiből $a^2 > b^2 + c^2$, hiszen $\cos\alpha < 0$. Mivel $(b-c)^2 > 0$, így $b^2 + c^2 > 2bc$; tehát az előbbi egyenlőtlenségből:

$$2a^2 > 2b^2 + 2c^2 > b^2 + c^2 + 2bc = (b+c)^2.$$

*Megjegyzések.* 1. Könnyen belátható, hogy a $DE \geq EF$ esetben a háromszög csak hegyesszögű lehet. Ekkor ugyanis $2a^2 \leq (b+c)^2$ teljesül, amit a koszinusztétel felhasználásával átalakítva:

$$2(b^2 + c^2 - 2bc \cdot cos\alpha) \leq b^2 + c^2 + 2bc, \quad \text{innen}$$

$$\cos\alpha \geq \frac{(b-c)^2}{4bc}, \quad \text{tehát a háromszög hegyesszögű.}$$

2. A feladat állítása kiterjeszthető. A II. megoldásból azonnal látszik, hogy $DE < EF$ akkor is teljesül, ha az $A$ csúcsnál derékszög van.