

I. megoldás. a) Ismeretes, hogy a húrnégyszög területe

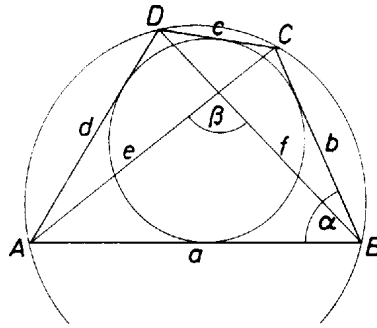
$$t = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)},$$

ahol $s = \frac{a+b+c+d}{2}$. (Ez a tétel megtalálható *Reiman István: A geometria és határterületei* c. könyvének 246. oldalán.) Mivel az adott négyszög érintőnégyszög is, $s = a+c = b+d$, azaz $s-a = c$, $s-b = d$, $s-c = a$ és $s-d = b$. Ezért $t = \sqrt{abcd}$.

b) Könnyű belátni, hogy az érintőnégyszög területe

$$t = \frac{a+b+c+d}{2} \cdot r, \text{ és így } r = \frac{2t}{a+b+c+d},$$

$$(1) \quad r^2 = \frac{4t^2}{(a+b+c+d)^2} = \frac{4abcd}{(a+b+c+d)^2}.$$



Az ábra ABC és ACD háromszögének területe legyen t_1 , illetve t_2 .. Ekkor ismert összefüggés szerint $R = \frac{abe}{4t_1}$ és $R = \frac{cde}{4t_2}$, aminek alapján
 $Rt_1 + Rt_2 = Rt = \frac{abe + cde}{4}$, és ebből

$$(2) \quad R = \frac{e(ab + cd)}{4t}.$$

Hasonlóan kapjuk az f átló létrehozta két háromszögből:

$$(3) \quad R = \frac{f(ad + bc)}{4t}.$$

(2) és (3)-ból:

$$(4) \quad R^2 = \frac{ef(ab + cd)(ad + bc)}{16t^2}.$$

Ptolemaiosz tétele szerint $ef = ac + bd$, és így az a) részben bizonyított területképletet is felhasználva (4) a következőképpen alakul:

$$(5) \quad R^2 = \frac{(ac + bd)(ab + cd)(ad + bc)}{16abcd}.$$

Azt kell bizonyítanunk, hogy, $r\sqrt{2} \leq R$ azaz $2r^2 \leq R^2$. Az (1) és (5) összefüggéseket felhasználva azt kell belátnunk, hogy

$$\frac{8abcd}{(a+b+c+d)^2} \leq \frac{(ac + bd)(ab + cd)(ad + bc)}{16abcd},$$

amivel ekvivalens a következő:

$$(6) \quad (abcd)^2 \leq \frac{ac + bd}{2} \cdot \frac{ab + cd}{2} \cdot \frac{ad + bc}{2} \cdot \left(\frac{a+b+c+d}{4} \right)^2.$$

A számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján

(7)

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{abcd} &\leq \frac{ac+bd}{2}, & \sqrt{abcd} &\leq \frac{ab+cd}{2}, \\ \sqrt{abcd} &\leq \frac{ad+bc}{2} & \text{és} & \sqrt[4]{abcd} \leq \frac{a+b+c+d}{4}. \end{aligned} \right\}$$

Az utolsó egyenlőtlenséget négyzetre emelve és a (7)-ben szereplő egyenlőtlenségekkel összeszorozva a (6) egyenlőtlenség bizonyítását kapjuk, ami egyben a feladat b) állításának igazolása is.

Szalkai Ákos (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., IV. o. t.)

II. megoldás. a) Az *ábra* jelöléseit használva, a koszinusztétel szerint $e^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$, illetve $e^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos(180^\circ - \alpha) = c^2 + d^2 + 2cd \cos \alpha$. E két összefüggésből

$$(1) \quad a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \alpha = c^2 + d^2 + 2cd \cdot \cos \alpha.$$

Mivel a négyszög érintőnéyszög is, $a + c = b + d$, tehát $a - b = d - c$. Az utóbbi egyenlőséget négyzetre emelve

$$(2) \quad a^2 + b^2 - 2ab = c^2 + d^2 - 2cd.$$

(1) és (2)-ből: $2ab - 2ab \cdot \cos \alpha = 2cd \cdot \cos \alpha + 2cd$, amiből

$$(3) \quad \cos \alpha = \frac{ab - cd}{ab + cd}.$$

Mivel $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$, és így (3) alapján

$$(4) \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{(ab - cd)^2}{(ab + cd)^2}} = \frac{\sqrt{4abcd}}{ab + cd}.$$

Fejezzük ki ezután a négyszög területét az ABC és ACD háromszögek területének összegeként:

$$t = \frac{ab \cdot \sin \alpha}{2} + \frac{cd \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{ab + cd}{2} \cdot \frac{\sqrt{4abcd}}{ab + cd},$$

ahol közben felhasználtuk (4)-et. Ebből láthatjuk, hogy $t = \sqrt{abcd}$, amint azt bizonyítani kellett.

b) Ismeretes, hogy az érintőnéyszög területe $t = \frac{a + b + c + d}{2} \cdot r$, illetve az a) részben bizonyítottak szerint $t = \sqrt{abcd}$. A számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség szerint $\sqrt[4]{abcd} \leq \frac{a + b + c + d}{4}$, ezért a négyszög területének kétféle felírása alapján igaz a következő:

$$\frac{4 \cdot \sqrt[4]{abcd}}{2} \cdot r \leq \frac{a + b + c + d}{2} \cdot r = \sqrt{abcd},$$

amiből

$$2 \cdot r \sqrt{abcd} \leq \sqrt{abcd},$$

azaz

$$(5) \quad 4r^2 \leq \sqrt{abcd} = t.$$

Jelöljük az átlók szögét β -val. Ekkor a négyszög területe $t = \frac{e \cdot f \cdot \sin \beta}{2}$, tehát $t \leq \frac{e \cdot f}{2}$. Nyilvánvaló, hogy $2R \geq e$, illetve $2R \geq f$, ezért

$$(6) \quad t \leq \frac{2R \cdot 2R}{2} = 2R^2.$$

Az (5) és (6) összefüggésekből $4r^2 \leq 2R^2$, azaz $2r^2 \leq R^2$, amint azt bizonyítani kellett.

Varga Emese (Kunszentmárton, József A. Gimn., III. o. t.)

III. megoldás. Csak a feladat b) részére adunk újabb megoldást. *N. Fuss*tól – aki *Euler* tanítványa volt – származik a következő tétel: Egy húr- és érintőnéyszög körülírt körének sugara R , beírt körének sugara r , a középpontok távolsága d . Ekkor fennáll a

$$2r^2(R^2 + d^2) = (R^2 - d^2)^2$$

összefüggés. Bizonyítása megtalálható *H. Dörrie*: A diadalmas matematika c. könyvének 208. oldalán (Gondolat Kiadó, 1965). Ebben az összefüggésben a d^2 tagot mindkét oldalon elhagyva a következő egyenlőtlenséget kapjuk: $2r^2 R^2 \leq R^4$, amiből $2r^2 \leq R^2$.

Párniczky Benedek, (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., I. o. t.)

Megjegyzések.

1. A Fuss-féle tétel háromszögre vonatkozó megfelelőjét, $R^2 - d^2 = 2Rr$, már Euler közölte. Fuss megállapította az R , r és d közti összefüggést az öt-, hat-, hét- és nyolcszögre is.

2. Néhány megoldónk *Molnár Emil*: Matematikai Versenyfeladatok gyűjteménye c. könyvének (Tankönyvkiadó, 1974) 550. oldalán található tételre, Poncelet tételére építi a feladat b) részének megoldását. A könyv a tételt bizonyítás nélkül ismerteti. Itt nem volt szükség egy ilyen mély, a projektív geometria eszközeivel bizonyítható tétel fölhasználására.