

Írjuk fel a definíció alapján a sorozat első néhány elemét:

$$\begin{array}{llll} a_0 = 1; & a_1 = 11; & a_2 = 31; & a_3 = 61; \\ a_4 = 101; & a_5 = 101; & a_6 = 281; & a_7 = 281; \\ a_8 = 361; & a_9 = 451; & a_{10} = 451; & a_{11} = 451. \end{array}$$

Láthatjuk, hogy $n = 0$ -ra és $n = 1$ -re az állításban szereplő becslés éles, $2 \leq n \leq 11$ esetén viszont nem.

Teljes indukcióval bebizonyítjuk, hogy $2 \leq n$ esetén $a_n \leq 10^2$.

Ebből $2 \leq n \leq 11$ -re következik az állítás.

Állításunk $2 \leq n \leq 11$ esetén, azaz az előbb felírt elemekre teljesül.

Tegyük fel, hogy $N \geq 12$ olyan szám, hogy $2 \leq n < N$ esetén $a_n \leq 10n^2$ teljesül. Megmutatjuk, hogy akkor $a_N \leq 10N^2$, vagyis az állításunk $n = N$ esetén is teljesül.

A sorozat definíciója szerint

$$a_N = 2a_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} + 3a_{\lfloor \frac{N}{3} \rfloor} + 6a_{\lfloor \frac{N}{6} \rfloor}.$$

Mivel $N \geq 12$, az $\lfloor \frac{N}{2} \rfloor$, $\lfloor \frac{N}{3} \rfloor$ és $\lfloor \frac{N}{6} \rfloor$ számok 1-nél nagyobbak és N -nél kisebbek, így az indukciós feltevés alapján

$$a_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \leq 10 \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor^2 \leq 10 \left(\frac{N}{2} \right)^2 = \frac{5}{2}N^2,$$

$$a_{\lfloor \frac{N}{3} \rfloor} \leq 10 \left\lfloor \frac{N}{3} \right\rfloor^2 \leq 10 \left(\frac{N}{3} \right)^2 = \frac{10}{9}N^2,$$

$$a_{\lfloor \frac{N}{6} \rfloor} \leq 10 \left\lfloor \frac{N}{6} \right\rfloor^2 \leq 10 \left(\frac{N}{6} \right)^2 = \frac{5}{18}N^2.$$

Ezekből a becslésekből a_N -re azt kapjuk, hogy

$$a_N = 2a_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} + 3a_{\lfloor \frac{N}{3} \rfloor} + 6a_{\lfloor \frac{N}{6} \rfloor} \leq 2 \cdot \frac{5}{2}N^2 + 3 \cdot \frac{10}{9}N^2 + 6 \cdot \frac{5}{18}N^2 = 10N^2.$$

Ezzel az állításunkat – és vele együtt a feladat állítását is – bebizonyítottuk.