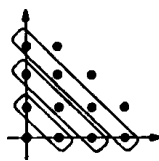


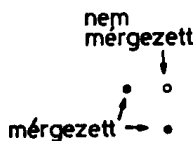
A feladatot nyilván úgy is lehet értelmezni, hogy ha mi előre kijelöljük a megmérgezendő pontokat, akkor a bolha az irányait meg tudja-e úgy választani, hogy mérgezett pontra ne lépjen. Megmutatjuk, hogy ezt mindig meg tudja tenni.



1. ábra

Legyen R_n azoknak az (x, y) rácspontoknak a halmaza, amelyekre $x + y = n$ (1. ábra). A bolha nyilván az n -edik lépésben ugrik az $n + 1$ darab R_n -beli pont valamelyikére.

Legyen m_n azoknak az R_n -beli pontoknak a száma, amelyeket legkésőbb az n -edik lépésben (tehát a bolha „megérkezéséig”) megmérgezünk. Mivel az első n lépésben n pontot mérgezünk meg, nyilván $m_1 + m_2 + \dots + m_n \leq n$.



2. ábra

Végül jelölje h_n azoknak az R_n -beli pontoknak a számát, ahová a bolha eljuthat. Ez nem feltétlenül azonos a meg nem mérgezett pontok számával, lehet, hogy egy pontba pl. azért nem juthat el, mert annak megmérgeztük a bal oldali és az alsó szomszédját (2. ábra). Azt fogjuk megmutatni, hogy

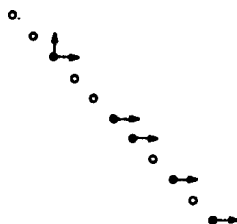
$$h_n \geq n + 1 - (m_1 + m_2 + \dots + m_n).$$

Mivel $m_1 + \dots + m_n \leq n$, ebből $h_n \geq 1$ következik, vagyis az n -edik lépésben még nem lehetünk biztosak afelől, hogy a bolhát elpusztítottuk (és ez minden n -re igaz).

Állításunkat teljes indukcióval igazoljuk; $n = 1$ -re igaz: ha $m_1 = 0$, akkor mind a két R_1 -beli pontra ugorhat a bolha; ha $m_1 = 1$, akkor pedig az egyikre ugorhat.

Mindkét esetben $h_1 = 2 - m_1$.

Tegyük most fel, hogy $h_n \geq n + 1 - (m_1 + \dots + m_n)$. Megmutatjuk, hogy ekkor $h_{n+1} \geq n + 2 - (m_1 + \dots + m_{n+1})$.



3. ábra

A bolha h_n darab R_n -beli pontra ugorhat; ezeknek összesen legalább $1 + h_n$ jobb oldali vagy felső szomszédja van, mert jobb oldali szomszédai, valamint a legfelső pont felső szomszédja (ez összesen $1 + h_n$ pont) különbözők (3. ábra). A szóba jövő $1 + h_n$ darab R_{n+1} -beli pont közül legfeljebb m_{n+1} a mérgezett; a bolha tehát legalább $1 + h_n - m_{n+1}$ helyre ugorhat tovább úgy, hogy nem lép mérgezett pontra.

Ezzel azt kaptuk, hogy

$$h_{n+1} \geq h_n - m_{n+1} \geq 1 + (n + 1 - (m_1 + \dots + m_n)) - m_{n+1} = n + 2 - (m_1 + \dots + m_{n+1}).$$

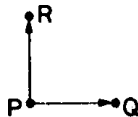
Ezzel az állításunkat igazoltuk; semmilyen n -re nem tudjuk garantálni, hogy a bolhát legfeljebb n lépésben elpusztíthatjuk.

Megjegyzés. Ha az volna a kérdés, hogy el tudjuk-e pusztítani a bolhát *véges sok lépésben*, akkor arra is tagadó lenne a válasz.

(A különbség lényeges: ha pl. valaki gondol egy pozitív egész számot, azt ki lehet találni véges sok lépésben úgy, hogy végig kérdezzük az összes számot; azt azonban semmiképpen sem tudjuk vállalni, hogy pl. legfeljebb 100 találgatással kitaláljuk.)

Nevezzünk egy rácspontot „jó”-nak, ha a bolha arra lépve még akármilyen sokáig életben tud maradni. A feladat megoldásából az derült ki, hogy az origó „jó” rácspont.

Bebizonyítjuk, hogy, „jó” rácspontból a bolha tovább tud ugrani egy újabb „jó” rácspontra.



4. ábra

Legyen P egy „jó” rácspont, a jobb és felső szomszédai legyenek Q és R (4. ábra). Tegyük fel, hogy Q és R egyike sem „jó”. Ekkor léteznek olyan n és k pozitív egészek, hogy a bolha Q -ra lépve legfeljebb az n -edik, R -re lépve pedig legfeljebb a k -adik lépésben elpusztul. Ekkor viszont a bolha P -re lépve legfeljebb a $\max(n, k)$ -adik lépésben (akár Q -ra, akár R -re lép tovább) mindenképpen elpusztul, vagyis P sem lehet „jó” rácspont.

Ezután már nem nehéz a bolha túlélési stratégiáját megadni: ugorjon mindig „jó” rácspontra.