

I. megoldás. A feladat feltétele azt jelenti, hogy

$$(1) \quad \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma + \cos \delta = 0,$$

ahol $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ a négyszög egymás utáni csúcsainál lévő szögek. Alkalmazzuk a $\cos \alpha + \cos \beta$ szorzattá alakítására vonatkozó azonosságot. Ekkor (1) így alakul:

$$2 \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + 2 \cdot \cos \frac{\gamma + \delta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma - \delta}{2} = 0.$$

Mivel $\gamma + \delta = 360^\circ - (\alpha + \beta)$, azért

$$2 \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - 2 \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\gamma - \delta}{2} = 0,$$

amiből

$$\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \left(\cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \cos \frac{\gamma - \delta}{2} \right) = 0.$$

Ez pontosan akkor teljesül ha,

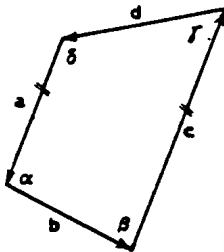
$$\text{vagy } \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = 0, \text{ vagy } \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \cos \frac{\gamma - \delta}{2}.$$

Az első esetben $\alpha + \beta = 180^\circ$ (mivel α, β konvex szögek, nincs egyéb lehetőség). Ekkor a négyszög trapéz. A második esetben $|\frac{\alpha - \beta}{2}| = |\frac{\gamma - \delta}{2}|$ következik. Ez azt jelenti, hogy $\alpha - \beta = \gamma - \delta$, vagy $\alpha - \beta = \delta - \gamma$, azaz $\alpha + \delta = \beta + \gamma$ vagy $\alpha + \gamma = \beta + \delta$. Itt az első eset ismét azt jelenti, hogy a négyszög trapéz, a második pedig azt, hogy húrnégyszög.

Cserhádi Vencel (Jászberény, Lehel Vezér Gimn., IV. o. t.) dolgozata alapján

II. megoldás. Használjuk az *ábra* jelöléseit. Az (1)-ben szereplő koszinuszértékeket az oldalakra illeszkedő vektorok skaláris szorzatával fejezhetjük ki, pl.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$, ahol a és b a megfelelő vektorok hossza.



Ezért $\cos \alpha = -\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a \cdot b}$. Ezután az (1) feltételt így írhatjuk:

$$\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a \cdot b} + \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{b \cdot c} + \frac{\vec{c} \cdot \vec{d}}{c \cdot d} + \frac{\vec{d} \cdot \vec{a}}{d \cdot a} = 0,$$

amiből

$$c \cdot d \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} + a \cdot d \cdot \vec{b} \cdot \vec{c} + a \cdot b \cdot \vec{c} \cdot \vec{d} + b \cdot c \cdot \vec{d} \cdot \vec{a} = 0.$$

Ennek bal oldalát szorzattá alakíthatjuk:

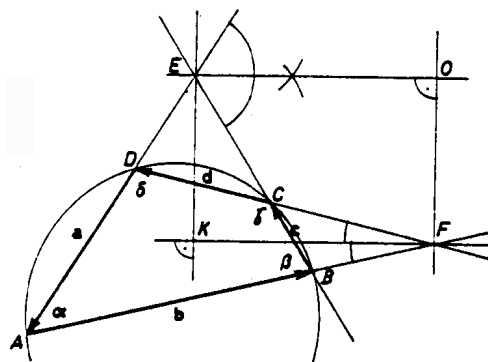
$$(d \cdot \vec{b} + b \cdot \vec{d})(c \cdot \vec{a} + a \cdot \vec{c}) = 0.$$

Ez utóbbi kétféleképpen állhat fenn:

Az első eset az, hogy a bal oldal valamelyik tényezője zérusvektor, azaz $d \cdot \vec{b} + b \cdot \vec{d} = \vec{0}$ vagy $\frac{a}{c} \left(\frac{\vec{d}}{a} + \frac{\vec{c}}{c} \right) = 0$, $\frac{\vec{d}}{a} = -\frac{\vec{c}}{c}$.

Ez csak úgy lehetséges, ha $\vec{b} \parallel \vec{d}$ vagy $\vec{a} \parallel \vec{c}$, amikor is a négyszög trapéz.

A második esetben $c \cdot \vec{a} + a \cdot \vec{c}$ merőleges $d \cdot \vec{b} + b \cdot \vec{d}$ -re és feltehetjük, hogy az $ABCD$ négyszög nem trapéz, vagyis létezik a szemközti oldalpárok E és F metszéspontja.



Az $a \cdot \vec{c}$ és $c \cdot \vec{a}$ vektorok hossza egyenlő, így ezek összege az E pontnál keletkező egyik szög EO szögfelezőjével párhuzamos. Hasonlóan $d \cdot \vec{b}$ és $b \cdot \vec{d}$ összege az F szögfelezővel párhuzamos. Ezért $EO \perp FO$, de akkor $EK \perp FK$ is fennáll, ahol EK és FK is szögfelezők. Könnyen láthatjuk, hogy $\angle AEK = (180^\circ - \alpha - \beta)/2$ és $\angle AFK = (180^\circ - \alpha - \delta)/2$. Az $AFKE$ négyszögben a belső szögek összege 360° , tehát

$$\frac{180^\circ - \alpha - \beta}{2} + \frac{180^\circ - \alpha - \delta}{2} + \alpha + 270^\circ = 360^\circ,$$

amiből $\beta + \delta = 180^\circ$, a négyszög húrnégyszög.

Ratkó Éva (Bp., Berzsenyi D. Gimn., III. o. t.) dolgozata alapján