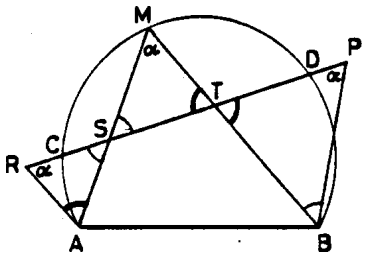
**I. megoldás**. Szerkesszük meg a $CD$ egyenesen azt az $R$ és $P$ pontot, amelyre $ARP\sphericalangle = BPR\sphericalangle = \alpha$, ahol $\alpha$ az a szög, amelyben $M$-ből az $AB$ szakasz látszik.




*1. ábra*

Az *1. ábrán* egy és két ívvel jelölt csúcsszögek egyenlősége folytán az $RAS$ és a $PTB$ háromszögek hasonlóak. Ezért $RS : AR = PB : TP$, amiből $RS \cdot TP = AR \cdot PB$.

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség szerint:

$$\frac{RS + TP}{2} \geqq \sqrt{RS \cdot TP} = \sqrt{AR \cdot PB}, \tag{1}$$

és itt $AR \cdot PB$ állandó. (1)-ben egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $RS = TP = \sqrt{AR \cdot PB}$. Ezután az $ST$ szakaszt így becsülhetjük:

$$ST = RP - (RS + TP) \leqq RP - 2\sqrt{AR \cdot PB},$$

tehát $ST$ maximuma: $RP - 2\sqrt{AR \cdot PB}$, és ezt akkor kapjuk, ha $RS = TP = \sqrt{AR \cdot PB}$.

A $\sqrt{AR \cdot PB}$ szakasz megszerkeszthető. Ezt $PR$-re az $R$ és $P$ felől felmérve kapjuk az $S'$ és $T'$ pontokat, amelyekre $S'T'$ maximális. Meg kell még mutatnunk, hogy ezekhez a pontokhoz létezik a köríven megfelelő $M$ pont. Mindenekelőtt megmutatjuk, hogy $\sqrt{AR \cdot PB} \leqq RP/2$. Legyen ugyanis $M$ a $CD$ ív egy tetszőleges pontja, és a hozzá tartozó metszéspontok $S$ és $T$. Ekkor

$$\sqrt{AR \cdot PB} = \sqrt{RS \cdot TP} \leqq \sqrt{RS \cdot SP} \leqq \frac{RS + SP}{2} = \frac{RP}{2}.$$

Ebből következik, hogy az $RP$ szakaszon az előbb megszerkesztett $S'$ és $T'$ pontok sorrendje a következő: $R, S', T', P$. Tekintsük ezután az $ARS'$ és $T'PB$ háromszögeket. Ezek oldalaira:

$$\frac{AR}{RS'} = \frac{AR}{\sqrt{AR \cdot PB}} = \sqrt{\frac{AR}{PB}}, \quad \text{illetve} \quad \frac{T'P}{PB} = \frac{\sqrt{AR \cdot PB}}{PB} = \sqrt{\frac{AR}{PB}},$$

tehát két oldalpárjuk aránya megegyezik és a közbezárt $\alpha$ szög is egyenlő. Ezért e két háromszög hasonló, s így szögeik megegyeznek. Az $S'$-nél és $T'$-nél lévő csúcsszögeket figyelembe véve az $AS'$ és $BT'$ egyenesek metszik egymást egy $M'$ pontban és a $T'M'S'$ háromszög is hasonló az előző kettőhöz. De akkor az $M'$ csúcsánál lévő szög $\alpha$, tehát $M'$ rajta van a köríven.

*Papolczy Péter* (Bp., Berzsenyi D. Gimn., IV. o. t.)

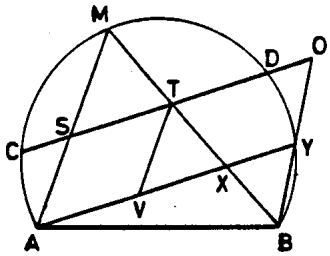
**II. megoldás.** Legyen először $CA = BD$, ekkor $CD \parallel AB$. Az $M$ pont távolsága a $CD$ egyenestől legyen $x$, $AB$ és $CD$, távolsága pedig $d$.

Az $MST$ és $MAB$ háromszögek hasonlósága miatt

$$\frac{ST}{AB} = \frac{x}{x + d} = \frac{1}{1 + \frac{d}{x}},$$

amelyből látjuk, hogy $ST$ akkor maximális, ha $x$ is az, és ebben az esetben $M$ a $CD$ ív felezőpontja.

Az általános esetre térve feltehetjük, hogy $CA < BD$.




*2. ábra*

Húzzunk párhuzamost $A$-n keresztül $CD$-vel. Messe ez $MB$-t $X$-ben, a körívet pedig $Y$-ban (*2. ábra*). Az $AM$-mel $T$-n át húzott párhuzamos messe $AY$-t a $V$ pontban.

Nyilvánvaló, hogy $AV + VY$ állandó, továbbá az $ASTV$ paralelogrammából $ST = AV$. Ezért $ST$ akkor lesz maximális, ha $VY$ minimális. Könnyen látható, hogy $VTB\sphericalangle = VYB\sphericalangle$, hiszen a bal oldalon lévő szög egyállású az $AMB$ szöggel, a jobb oldali pedig egy íven nyugvó kerületi szög ugyanezzel. Ezért a $B, Y, V, T$ pontok egy körön vannak. Keresnünk kell egy olyan kört, amely átmegy a $B$ és $Y$ pontokon, van közös pontja $CD$-vel, és az $AY$ húrt egy $Y$-tól különböző $V$ pontban metszi, úgy, hogy a $VY$ szakasz hossza minimális. Ha egy ilyen kör sugarát növeljük, $VY$ növekszik. Ezért $VY$ akkor lesz a legkisebb, ha a kör érinti a $CD$ szakaszt.

Jelöljük a keresett érintési pontot $T_1$-gyel. Legyen a $BY$ és a $CD$ egyenesek metszéspontja $O$. Az $O$ pont biztosan létrejön, hiszen $BY$ és $CD$ nem párhuzamosak. A körérintő és szelődarabok összefüggése alapján $OT_1^2 = OY \cdot OB$, ahonnan $OT_1$ megszerkeszthető. Az $OT_1$ szakaszt $O$-ból $CD$ egyenesre mérve ($D$ felé) kapjuk a $T_1$ pontot, majd $CD$-re $T_1$-ben merőlegest állítva és ezt $BY$ felező merőlegesével elmetszve a keresett kör középpontját. A kör és $AY$ metszéspontja a $V_1$ pont, az $AV_1 = S_1T_1$ összefüggés alapján pedig $S_1$ is megszerkeszthető. Az elmondottakból következik, hogy az így szerkesztett $S_1T_1$ valóban maximális.

Meg kell még mutatnunk, hogy az $AS_1$ és a $BT_1$ egyenesek $M_1$ metszéspontja az adott köríven van. Mivel $B, Y, T_1, V_1$ egy körön helyezkednek el, $BYV_1\sphericalangle = V_1T_1B\sphericalangle$; továbbá $AS_1$ párhuzamos $VT_1$-gyel, így $AM_1T_1\sphericalangle = V_1T_1B\sphericalangle$. De akkor $AM_1T_1\sphericalangle = BYV_1\sphericalangle$, tehát $M_1$-ből $AB$ ugyanakkora szögben látszik, mint az $Y$ pontból, ezért $M_1$ rajta van a köríven.

*Kovács Flórián* (Bp. Árpád Gimn., IV. o. t.) dolgozata alapján