Legyen a_1, a_2, ... az a pozitív számokból álló sorozat, amelyre tetszőleges pozitív n-re

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{1}{a_n}. \tag{1}$$

Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{2n-1}} \le a_n \le \frac{1}{\sqrt{n}}. \tag{2}$$

I. megoldás. Legyen $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 1/a_n$. Azt fogjuk megmutatni, hogy

$$\sqrt{n} \leqq S_n \leqq \sqrt{2n-1} \qquad \text{(ez ekvivalens az állítással).} \tag{3}$$

A bizonyítást teljes indukcióval végezzük. $n = 1$ esetén az első egyenlet szerint $a_1 = 1/a_1$, amiből $a_1 = 1$, $S_1 = 1$ és így $\sqrt{1} \leqq S_1 \leqq \sqrt{2 \cdot 1 - 1}$ valóban teljesül.

Legyen $k > 1$ és tegyük fel, hogy (3) teljesül k-ra:

$$\sqrt{k} \leqq S_k \leqq \sqrt{2k-1}. \tag{4}$$

Megmutatjuk, hogy ekkor $(k+1)$-re is teljesül. Ehhez először kifejezzük S_{k+1}-et S_k segítségével. Írjuk fel a $(k+1)$-edik egyenletet:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k + a_{k+1} = S_k + a_{k+1} = \frac{1}{a_{k+1}}, \quad \text{ahonnan}$$
$$a_{k+1}^2 + S_k a_{k+1} - 1 = 0.$$

Az $x^2 + S_k x - 1 = 0$ egyenlet gyökei:

$$\frac{-S_k + \sqrt{S_k^2 + 4}}{2} \quad \text{és} \quad \frac{-S_k - \sqrt{S_k^2 + 4}}{2}.$$

Ezek közül a második negatív, a_{k+1} viszont pozitív, tehát

$$a_{k+1} = \frac{-S_k + \sqrt{S_k^2 + 4}}{2} \quad \text{és így} \quad S_{k+1} = S_k + a_{k+1} = \frac{S_k + \sqrt{S_k^2 + 4}}{2}.$$

A (4) indukciós feltevés szerint ebből

$$\frac{\sqrt{k} + \sqrt{k+4}}{2} \leqq S_{k+1} \leqq \frac{\sqrt{2k-1} + \sqrt{2k+3}}{2}.$$

Bebizonyítjuk, hogy $(\sqrt{k} + \sqrt{k+4})/2 \geqq \sqrt{k+1}$, ebből következik az állítás bal oldala: $\sqrt{k+1} \leqq S_k$. Ugyanis 2-vel szorozva és négyzetre emelve:

$2k + 4 + 2\sqrt{k(k+4)} \geqq 4k + 4$, ami valóban igaz, mert $\sqrt{k(k+4)} \geqq k$.

Hasonlóan adódik a másik bizonyítandó egyenlőtlenség, ha belátjuk, hogy

$$\frac{\sqrt{2k-1} + \sqrt{2k+3}}{2} \leqq \sqrt{2k+1}.$$

Ugyancsak 2-vel szorozva és négyzetre emelve kapjuk, hogy

$$4k + 2 + 2\sqrt{4k^2 + 4k - 3} \leqq 8k + 4,$$

ami pedig teljesül, mert

$$\sqrt{4k^2 + 4k - 3} \leqq \sqrt{4k^2 + 4k + 1} = 2k + 1.$$

Ezzel bebizonyítottuk, hogy

$$\sqrt{k+1} \leqq S_{k+1} \leqq \sqrt{2k+1} = \sqrt{2(k+1) - 1},$$

és így igazoltuk az állítást.

II. megoldás. Legyen $b_n = \left(\frac{1}{a_n}\right)^2$. Azt fogjuk megmutatni, hogy

$$n \leqq b_n \leqq 2n-1.$$

Írjuk fel az (1) egyenletet két szomszédos indexre:

$$a_1+a_2+\ldots+a_k+a_{k+1}=\frac{1}{a_{k+1}}, \quad a_1+a_2+\ldots+a_k=\frac{1}{a_k};$$

és ezeket vonjuk ki egymásból:

$$a_{k+1}=\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_k}.$$

Innen $1/a_k$-t kifejezve:

$$\frac{1}{a_k}=\frac{1}{a_{k+1}}-a_{k+1},$$

és négyzetre emelve:

$$\left(\frac{1}{a_k}\right)^2=\left(\frac{1}{a_{k+1}}\right)^2+a_{k+1}^2-2, \quad \text{vagyis}$$
$$b_k=b_{k+1}+a_{k+1}^2-2.$$

Mivel

$$\frac{1}{a_{k+1}}=a_1+\ldots+a_{k+1}>a_{k+1}, \qquad \text{ezért} \qquad 1>a_{k+1}^2.$$

Ebből pedig

$$b_{k+1}-b_k=2-a_{k+1}^2<2 \quad \text{és}$$
$$b_{k+1}-b_k=2-a_{k+1}^2>1 \quad \text{következik.}$$

Végül $b_1=1$ alapján

$$b_n=(b_n-b_{n-1})+(b_{n-1}-b_{n-2})+\ldots+(b_2-b_1)+b_1 \geqq (n-1)\cdot 1+1=n \quad \text{és}$$
$$b_n=(b_n-b_{n-1})+(b_{n-1}-b_{n-2})+\ldots+(b_2-b_1)+b_1 \leqq (n-1)\cdot 2+1=2n-1.$$

Ezzel az állítást igazoltuk.

III. megoldás.
(1)-et a_n-nel szorozva:

$$a_1a_n+a_2a_n+\ldots+a_n^2=1.$$

Írjuk ezt fel $n=1,2,\ldots,k$-ra, adjuk össze a kapott egyenlőségeket:

$$\left.\begin{array}{ll} a_1^2 & =1 \\ a_1a_2+a_2^2 & =1 \\ a_1a_3+a_2a_3+a_3^2 & =1 \\ \vdots & \vdots\ \ \vdots \\ a_1a_k+a_2a_k+a_3a_k+\ldots+a_k^2 & =1, \end{array}\right\} \sum_{n=1}^{k} a_n^2+\sum_{n<m} a_na_m=k.$$

Mivel

$$\frac{1}{a_k^2}=(a_1+\ldots+a_k)^2=\sum_{n=1}^{k}a_n^2+2\sum_{n<m}a_na_m, \qquad \text{ezért}$$

$$\frac{1}{a_k^2} \geqq \sum_{n=1}^{k}a_n^2+\sum_{n<m}a_na_m=k \quad \text{és}$$

$$\frac{1}{a_k^2}=2\left(\sum_{n=1}^{k}a_n^2+\sum_{n<m}a_na_m\right)-\sum_{n=1}^{k}a_n^2=2k-\sum_{n=1}^{k}a_n^2 \geqq 2k-a_1^2=2k-1.$$

Tehát $k \leqq 1/a_k^2 \leqq 2k-1$, amiből az állítás azonnal következik.