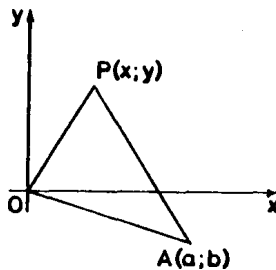


I. megoldás.

Az 1. ábrán látható (esetleg elfajuló) háromszögre

$$(1) \quad OP + PA \geq OA.$$



1. ábra

Az itt szereplő távolságokat kifejezve (1) így alakul:

$$(2) \quad \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2} \geq \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Mivel x és y nemnegatív számok, ezért

$$(3) \quad x + y = \sqrt{x^2 + 2xy + y^2} \geq \sqrt{x^2 + y^2},$$

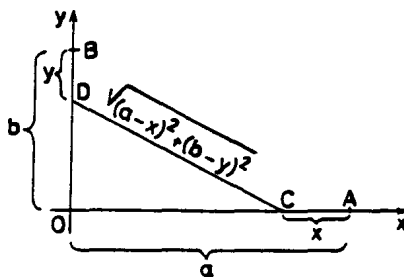
így (2) és (3) alapján

$$z = x + y + \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2} \geq \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(a-x)^2 + (b-x)^2} \geq \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Tehát z minimuma $\sqrt{a^2 + b^2}$, amit nemnegatív x és y esetén az $x = y = 0$ helyen vesz fel.

Németh Sándor (Győr, Révai M. Gimn. IV. o. t.)

II. megoldás.



2. ábra

A 2. ábra jelöléseivel

$$\begin{aligned} z &= AC + CD + DB = \\ &= x + y + \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2}, \end{aligned}$$

z tehát az $ACDB$ töröttvonal hosszúsága. Ez nyilván akkor a legkisebb, ha a vonal egyenes szakasz, vagyis

$$z = AB = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Ez nemnegatív x és y esetében pontosan akkor következik be, ha $x = 0$ és $y = 0$.

Megjegyzés: Mindkét megoldásban erősen kihasználtuk, hogy x és y nem negatív, hiszen pl. a II.-ban x is, y is szakasz hosszaként szerepelt. A feladat bizonyítása általánosítható a síkról a térre, vagy akár az n -dimenziós térre, így érvényes a következő:

Ha $a_1, a_2, \dots, a_n$ adott valós számok, $x_1, x_2, \dots, x_n$ pedig tetszőleges nemnegatív számok, akkor a

$$z = x_1 + x_2 + \dots + x_n + \sqrt{(a_1 - x_1)^2 + (a_2 - x_2)^2 + \dots + (a_n - x_n)^2}$$

kifejezés minimuma $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$.