

Legyenek  $1 = a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$  pozitív egészek. Megadunk egy szükséges és elégséges feltételt arra, hogy minden  $a_n$ -nél nem nagyobb egész szám előállítható legyen e számok közül néhány (esetleg csak egy) összegeként. Ezután megmutatjuk, hogy a 2000 pozitív osztóira teljesül ez a feltétel.

A feltétel a következő: minden  $1 \leq k < n$ -re  $a_{k+1} \leq 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_k$ . Ez a feltétel szükséges, mert ha  $a_{k+1} > 1 + a_1 + a_2 + \dots + a_k$ , akkor nem tudjuk előállítani  $(1 + a_1 + a_2 + \dots + a_k)$ -t  $a_i - k$  összegeként, hiszen  $a_{k+1}, \dots, a_n$  ennél a számnál nagyobb, így nem szerepelhetnek a tagok között, viszont a legnagyobb szám, amit a többi  $a_i$ -vel  $- a_1, a_2, \dots, a_k$ -val elő lehet állítani, kisebb  $(1 + a_1 + \dots + a_k)$ -nál.

Ezután  $n$  szerinti teljes indukcióval bebizonyítjuk, hogy ha a feltétel teljesül, akkor minden  $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ -nél nem nagyobb pozitív egész szám előállítható néhány  $a_i$  összegeként. Ez  $n = 1$ -re igaz: az egyetlen,  $a_1$ -nél nem nagyobb pozitív egész az 1, és  $a_1 = 1$ .

Tegyük fel, hogy  $n \geq 2$ , és minden  $(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})$ -nél nem nagyobb pozitív egész szám előáll  $a_1, \dots, a_{n-1}$  közül néhánynak az összegeként. Megmutatjuk, hogy ekkor  $a_n$ -et is felhasználva az  $(a_1 + \dots + a_{n-1}) + 1$  és  $(a_1 + \dots + a_n)$  közötti számok is előállíthatók ilyen módon. Legyen  $(a_1 + \dots + a_{n-1}) + 1 \leq b \leq a_1 + \dots + a_n$ . Azt akarjuk belátni, hogy  $b$  előállítható  $a_n$  és néhány  $a_i$  ( $1 \leq i \leq n-1$ ) összegeként. Ha  $b = a_n$ , akkor ez nyilvánvaló, így feltehető, hogy  $b \neq a_n$ . Az  $a_n \leq a_1 + \dots + a_{n-1} + 1 \leq b$  a feltétel szerint, tehát  $b > a_n$ . Az indukciós feltevés értelmében  $b - a_n (> 0)$  előállítható néhány  $a_i$  ( $1 \leq i \leq n-1$ ) összegeként. Ehhez az összeghez  $a_n$ -et hozzáadva éppen  $b$  előállításához jutunk. Ezzel a feltétel elégségességét is igazoltuk.

Mutatunk most egy erősebb (elégséges, de nem szükséges) feltételt és ezt fogjuk alkalmazni 2000 osztóira.

Tegyük fel, hogy minden  $1 \leq k < n$ -re  $a_{k+1} \leq 2a_k$ , azaz számaink mindegyike legfeljebb az előző kétszerese. Ekkor teljesül a fent bizonyított feltétel is, tehát hogy minden  $1 \leq k < n$ -re  $a_{k+1} \leq 1 + a_1 + \dots + a_k$ .

Állításunkat ismét indukcióval bizonyítjuk.

$$k = 1\text{-re } a_2 \leq 2a_1 = a_1 + 1.$$

Tegyük fel, hogy  $a_{k+1} \leq (a_1 + \dots + a_k) + 1$ . Ekkor

$$a_{k+2} \leq 2a_{k+1} = a_{k+1} + a_{k+1} \leq a_{k+1} + (a_1 + a_2 + \dots + a_k + 1) = (a_1 + a_2 + \dots + a_{k+1}) + 1.$$

Végül a 2000 osztói nagyság szerint:

$$1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25, 40, 50, 80, 100, 125, 200, 250, 400, 500, 1000, 2000,$$

és ezekre láthatóan teljesül, hogy mindegyikük legfeljebb az előző kétszerese.

*Lente Gábor* (Eger, Gárdonyi G. Gimn., III. o. t.) dolgozata alapján

*Megjegyzés.* A közölt bizonyítás segítségével általában az is belátható, hogy ha az  $n$  természetes szám  $2^a \cdot 5^b$  alakú, ahol  $a \geq 2$ , akkor minden, az  $n$ -nél nem nagyobb pozitív egész szám előállítható az  $n$  néhány osztójának összegeként. Ehhez elegendő, hogy az  $n$  szám  $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_s = n$  osztóira  $d_{i+1} \leq 2d_i$  teljesüljön ( $i = 1, 2, \dots, s-1$ ). Tekintsünk evégből egy  $d_i$  osztót ( $d_i < n$ ). Ha  $2d_i | n$ , akkor  $d_{i+1} \leq 2d_i$ . Ha  $2d_i$  nem osztója  $n$ -nek, akkor  $d_i = 2^a \cdot 5^v$ , ahol  $v < b$ ; ekkor viszont  $d' = 2^{a-2} \cdot 5^{v+1}$  osztja  $n$ -et, és  $d_i < \frac{5}{4}d_i = d'$  miatt  $d_{i+1} \leq \frac{5}{4}d_i < 2d_i$ .