

Vonjuk ki mindkét oldalt 1990 -ből; ekkor a bizonyítandó egyenlőség a következő alakot ölti:

$$\begin{aligned} & \frac{1990}{1} - \frac{1989}{2} + \frac{1988}{3} + \dots + \frac{2}{1989} - \frac{1}{1990} = \\ & = \left(2 - \frac{1}{996}\right) + \left(2 - \frac{3}{997}\right) + \dots + \left(2 - \frac{1989}{1990}\right). \end{aligned}$$

Jelölje a bal oldalt A , a jobb oldalt B :

$$B = \frac{1991}{996} + \frac{1991}{997} + \dots + \frac{1991}{1990} = 1991 \left(\frac{1}{996} + \dots + \frac{1}{1990} \right).$$

A bal oldalt úgy alakítjuk át, hogy a negatív előjelű tagokat pozitív jellel írjuk fel, majd a kétszer levonjuk.

$$\begin{aligned} A &= \frac{1990}{1} + \frac{1989}{2} + \dots + \frac{1}{1990} - 2 \left(\frac{1989}{2} + \frac{1987}{4} + \dots + \frac{1}{1990} \right) = \\ &= \left(\frac{1991}{1} - 1 \right) + \left(\frac{1991}{2} - 1 \right) + \dots + \left(\frac{1991}{1990} - 1 \right) - \\ &\quad - 2 \left(\left(\frac{1991}{2} - 1 \right) + \left(\frac{1991}{4} - 1 \right) + \dots + \left(\frac{1991}{1990} - 1 \right) \right) = \\ &= \left(1991 \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{1990} \right) - 1990 \right) - 2 \left(1991 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{1990} \right) - 995 \right) = \\ &= 1991 \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{1990} \right) - 1991 \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{995} \right) = \\ &= 1991 \left(\frac{1}{996} + \frac{1}{997} + \dots + \frac{1}{1990} \right). \end{aligned}$$

Megmutattuk, hogy $A = B$, így igazoltuk a bizonyítandó állítást.

Varjú Katalin (III. o. t.) megoldása alapján

Megjegyzés. Az alábbi okoskodás rámutat a feladat hátterére: tetszőleges pozitív n -re legyen

$$\begin{aligned} f_n(x) &= x - \frac{x - (2n - 1)}{2} + \frac{x - (2n - 2)}{3} - \dots + - \dots - \frac{x - 1}{2n} \quad \text{és} \\ g_n(x) &= \frac{x + 1}{n + 1} + \frac{x + 3}{n + 2} + \dots + \frac{x + 2n - 1}{2n}. \end{aligned}$$

A két polinom legfeljebb elsőfokú, $f_n(x)$ főegyütthatója

$$a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + - \dots + \frac{1}{2n - 1} - \frac{1}{2n},$$

$g_n(x)$ főegyütthatója pedig

$$b_n = \frac{1}{n + 1} + \frac{1}{n + 2} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

Ismeretes, hogy $a_n = b_n$ minden pozitív n -re. (A bizonyítás éppen a megoldásban bemutatott átalakítással végezhető.) Vegyük észre másfelől, hogy

$$\begin{aligned} f_n(2n + 1) &= (2n + 1) - 1 + 1 - \dots - 1 = 2n, \quad \text{továbbá} \\ g_n(2n + 1) &= \frac{2n + 2}{n + 1} + \frac{2n + 4}{n + 2} + \dots + \frac{4n}{2n} = 2n \quad \text{ugyancsak.} \end{aligned}$$

Az elsőfokú f_n és g_n polinomok főegyütthatói és a $(2n + 1)$ -helyen fölött értékeik egyenlők. A két polinom tehát *azonosan egyenlő*, így a 0 helyen is egyenlő értékeket vesznek föl:

$$f_n(0) = \frac{2n - 1}{2} - \frac{2n - 2}{3} + - \dots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n + 1} + \frac{3}{n + 2} + \dots + \frac{2n - 1}{2n} = g_n(0);$$

ez pedig éppen a bizonyítandó egyenlőség, ha $n = 995$.