

**Megoldás.** Az állítást indirekt módon bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy van olyan, minden valós  $x$  helyen értelmezett,  $g$  és  $h$  periodikus függvény, amelyekkel fennáll az

$$(1) \quad x^2 = g(x) + h(x)$$

függvényegyenlet. Legyen a  $g$  függvény egy periódushossza  $p > 0$  és a  $h$  függvény egy periódushossza  $q > 0$ . Ekkor minden  $x$ -re teljesülnek a

$$(2) \quad g(x+p) = g(x) \quad \text{és} \quad h(x+q) = h(x)$$

egyenletek. Helyettesítsük most rendre az  $x = 0$ ,  $p$ ,  $q$  és  $p+q$  értékeket az (1) egyenletbe. Ekkor a – periodikusság felhasználásával – rendre a

$$\begin{aligned} 0 &= g(0) + h(0) = g(p) + h(q), \\ p^2 &= g(p) + h(p), \quad q^2 = g(q) + h(q), \\ (p+q)^2 &= g(p+q) + h(p+q) = g(q) + h(p) \end{aligned}$$

egyenletekhez jutunk. Itt az első és utolsó egyenlet összegéből a 2. és 3. egyenletet kivonva azt kapjuk, hogy

$$2pq = g(q) + h(p) + g(p) + h(q) - g(p) - h(p) - g(q) - h(q) = 0,$$

azaz valamelyik periódushossz –  $p$  vagy  $q$  – nulla. Ez ellentmond feltevésünknek, s így bizonyítja a feladat állítását.

*Podoski Károly* (Bp., Árpád Gimn., IV. o. t.)

*Megjegyzés.* Ugyanígy bizonyítható az is, hogy  $k \geq 2$  esetén az  $f(x) = x^k$  függvény soha nem áll elő két periodikus függvény összegeként: mindössze annyit kell felhasználni, hogy pozitív  $p$  és  $q$  esetén  $p^k + q^k < (p+q)^k$ . Vegyük azonban észre, hogy  $k = 1$  esetén  $p^1 + q^1 = (p+q)^1$ , ez esetben tehát a fenti gondolatmenettel *nem* jutunk ellentmondáshoz. Az tehát a fenti bizonyításból nem derül ki, hogy az  $f(x) = x$  függvény sem áll elő két periodikus függvény összegeként.

Megmutatjuk viszont, hogy a fenti bizonyítás alapgondolatával belátható, hogy az  $f(x) = x^k$  függvény nem áll elő  $k$  darab (vagy annál kevesebb) periodikus függvény összegeként. Először csak  $k = 3$ -ra mutatjuk be a bizonyítást, utána pedig megmondjuk, hogyan általánosítható. Tegyük fel, hogy van három periodikus függvény,  $g_1(x)$ ,  $g_2(x)$  és  $g_3(x)$ , amelyekre teljesül az

$$x^3 = g_1(x) + g_2(x) + g_3(x)$$

függvényegyenlet. Legyen a  $g_i(x)$  függvény egy periódushossza  $p_i$ , és helyettesítsük e függvényegyenletben az  $x$  helyére rendre a következő  $8 = 2^3$  értéket:  $p_1 + p_2 + p_3$ ,  $p_1 + p_2$ ,  $p_1 + p_3$ ,  $p_2 + p_3$ ,  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$  és  $0$ .

A periodikusságot is felhasználva a következő egyenleteket kapjuk:

$$\begin{aligned} (p_1 + p_2 + p_3)^3 &= g_1(p_1 + p_2 + p_3) + g_2(p_1 + p_2 + p_3) + g_3(p_1 + p_2 + p_3) = \\ &= g_1(p_2 + p_3) + g_2(p_1 + p_3) + g_3(p_1 + p_2), \\ (p_1 + p_2)^3 &= g_1(p_1 + p_2) + g_2(p_1 + p_2) + g_3(p_1 + p_2) = \\ &= g_1(p_2) + g_2(p_1) + g_3(p_1 + p_2), \\ (p_1 + p_3)^3 &= g_1(p_3) + g_2(p_1 + p_3) + g_3(p_1), \\ (p_2 + p_3)^3 &= g_1(p_2 + p_3) + g_2(p_3) + g_3(p_2), \\ p_1^3 &= g_1(p_1) + g_2(p_1) + g_3(p_1) = g_1(0) + g_2(p_1) + g_3(p_1), \\ p_2^3 &= g_1(p_2) + g_2(0) + g_3(p_2), \\ p_3^3 &= g_1(p_3) + g_2(p_3) + g_3(0), \\ 0 &= g_1(0) + g_2(0) + g_3(0). \end{aligned}$$

Adjuk össze az első, az ötödik, a hatodik és hetedik egyenletet, s vonjuk ki belőle a többiek összegét. Ekkor a jobb oldalon, mint könnyen ellenőrizhető, minden kiesik, tehát nulla áll. A bal oldalon viszont  $(p_1 + p_2 + p_3)^3 - (p_1 + p_2)^3 - (p_1 + p_3)^3 - (p_2 + p_3)^3 + p_1^3 + p_2^3 + p_3^3 - 0 = 6p_1p_2p_3$ . Megint azt az ellentmondást kapjuk tehát, hogy valamelyik periódushossz nulla.

A bizonyítás tetszőleges  $k$ -ra csak annyiban különbözik a fentitől, hogy  $2^k$  egyenletet kapunk: ha a  $g_i$  függvény periódusa  $p_i$ , akkor minden  $0 \leq m \leq k$ -ra  $\binom{k}{m}$  darab egyenletet kell felírni: minden lehetséges módon kiválasztunk  $m$  darabot a  $p_1, p_2, \dots, p_k$  számok közül, mondjuk  $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_m}$ -t, és felírjuk a

$$\begin{aligned} (p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_m})^k &= g_1(p_{i_1} + \dots + p_{i_m}) + \dots + g_{i_1}(p_{i_2} + \dots + p_{i_m}) + \\ &+ g_{i_1+1}(p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_m}) + \dots + g_{i_2}(p_{i_1} + p_{i_2} + \dots + p_{i_m}) + \\ &+ \dots + g_k(p_{i_1} + \dots + p_{i_m}) \end{aligned}$$

egyenletet, majd ezeket páratlan  $m$ -re negatív, páros  $m$ -re pozitív előjellel összeadjuk.

Ekkor – a periodikusság miatt – a jobb oldalon megint minden kiesik, a bal oldalon pedig a  $0 - p_1^k - p_2^k - \dots - p_k^k + (p_1 + p_2)^k + (p_1 + p_3)^k + \dots + (p_1 + p_k)^k + (p_2 + p_3)^k + \dots + (p_2 + p_k)^k + \dots + (p_{k-1} + p_k)^k - (p_1 + p_2 + p_3)^k - \dots - (p_1 + p_2 + p_k)^k - \dots + (-1)^k (p_1 + p_2 + \dots + p_k)^k$  összeg szerepel. Erről némi számolással belátható, hogy a műveletek elvégzése során minden olyan tagja kiesik, amelyben nem szerepel minden  $p_i$  tényezőként. A bal oldal értéke tehát  $(-1)^k k! p_1 p_2 \dots p_k$ . Itt  $(-1)^k k! \neq 0$ , tehát megint ahhoz az ellentmondáshoz jutunk, hogy valamelyik periódushosszra nulla adódik.

Mivel nem zártuk ki, hogy a  $g_i$  függvények között az azonosan nulla függvény is szerepeljen (hiszen az is periodikus függvény), így beláttuk, hogy az  $f(x) = x^k$  függvény nem áll elő legfeljebb  $k$  darab periodikus függvény összegeként.