

I. megoldás. A szokásos jelöléseket használva $a = 2r \cdot \sin \alpha$, $b = 2r \cdot \sin \beta$.

A feltétel szerint $a^2 + b^2 = 4r^2$, azaz

$$4r^2 \cdot \sin^2 \alpha + 4r^2 \cdot \sin^2 \beta = 4r^2,$$

amiből

$$(1) \quad \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = 1.$$

Ismeretes, hogy $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$, ezért (1) így folytatható:

$$\frac{1 - \cos 2\alpha}{2} + \frac{1 - \cos 2\beta}{2} = 1, \text{ tehát } \cos 2\alpha + \cos 2\beta = 0.$$

A bal oldalt szorzattá alakítva:

$$2 \cdot \cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) = 0,$$

ami pontosan akkor teljesül, ha vagy

$$(2) \quad \cos(\alpha + \beta) = 0$$

vagy

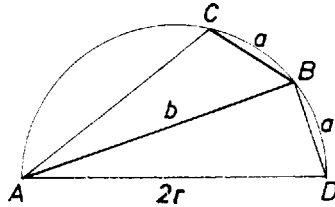
$$(3) \quad \cos(\alpha - \beta) = 0.$$

(2)-ből azt láthatjuk, hogy $\alpha + \beta = 90^\circ$, tehát ekkor a háromszög derékszögű, (3) pedig azt jelenti, hogy $|\alpha - \beta| = 90^\circ$, amikor is a háromszög biztosan tompaszögű. Erre az utóbbi esetre példa lehet egy olyan egyenlő szárú háromszög, amelyben a szárak hossza és a körülírt kör sugara r , a szárak közötti szög pedig 120° . Ennek a háromszögnek az alapja $b = r \cdot \sqrt{3}$, a két oldalának négyzetösszege: $r^2 + 3r^2 = 4r^2$, ami valóban egyenlő a körülírt kör átmérőjének négyzetével.

A feladat kérdésére tehát nemleges választ kell adnunk.

Harcos Gergely (BP., ELTE Apáczai Csere J. Gimn. III. o. t.)

II. megoldás. Megmutatjuk, hogy a háromszög nem feltétlenül derékszögű.



Az ábrát úgy rajzoltuk, hogy $CB = BD = a$ és $AD = 2r$ legyen. Az ábra további jelöléseit is használva, a Pitagorasz-tétel szerint az ABD háromszögre: $a^2 + b^2 = 4r^2$.

Mivel az ABC háromszög két oldala is a , illetve b , $a^2 + b^2 = 4r^2$ erre a háromszögre is teljesül, de az ACB szög nyilván tompaszög.

Egri Ilona (Győr, Révai M. Gimn., III. o. t.)